ChapitreI : **Transformation de Fourier Discrète**

I.1. Définition :

La transformée de Fourier permet de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel

1. Signaux discrets

Soit un signal $x(t)$échantillonné à une période T_e. Le signal échantillonné s'écrit :

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\,\delta(t - nT_e) \qquad \text{(I.1)}$$

En considérant une période d'échantillonnage normalisée ($T_e = 1$), on a :

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\,\delta(t - n) \qquad \text{(I.2)}$$

On obtient la suite de valeurs $x(n)$ appelée signal discret.

2. Opération sur les signaux discrets :

Soit : $\{x(n)\} = \{x(n), n \in \mathbb{Z}\}$ et $\{y(n)\} = \{y(n), n \in \mathbb{Z}\}$ des signaux discrets ;

- Multiplication par un scalaire :

$$\lambda \in \mathcal{R}, \lambda\{x(n)\} = \{\lambda x(n), n \in \mathbb{Z}\}$$

- Somme de signaux discrets :

$$\{x(n)\} + \{y(n)\} = \{x(n) + y(n), n \in \mathbb{Z}\}$$

- Multiplication de signaux discrets :

$$\{x(n)\} \times \{y(n)\} = \{x(n) \times y(n), n \in \mathbb{Z}\}$$

Ces opérations sur les signaux discrets donnent des signaux discrets.

3. Transformée de Fourier des signaux à temps discret (TFTD)

Soit x_e (t) un signal issu de l'échantillonnage de x(t) :

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\,\delta(t - nT_e) \qquad \text{(I.3)}$$

La Transformée de Fourier “classique” du signal échantillonné donne :

$$X_e(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\,\delta(t - nT_e) \right\} e^{-j2\pi f t} dt$$

$$X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \int_{-\infty}^{+\infty} \{\delta(t - nT_e)\}\, e^{-j2\pi f t} dt$$

En utilisant la définition de la distribution de Dirac, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{\delta(t - nT_e)\}\, e^{-j2\pi f t} = e^{-j2\pi n f T_e}$$

On obtient donc :

$$X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\, e^{-j2\pi n f T_e} \qquad \text{(I.4)}$$

La TF d'un signal échantillonné est une combinaison linéaire d'exponentielles complexes pondérées par la valeur des échantillons.

♣ Normalisation de la période d'échantillonnage : dorénavant et sauf mention contraire, on considerera que $T_e = 1$

Par conséquent :

$$X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j2\pi n f},$$

f est une variable continue

La TF d’un signal discret est une fonction continue ou non de la variable continue f.

4. Transformée de Fourier inverse des signaux discrets :

La TF des signaux discrets est périodique de période 1, l’expression de la TFTD inverse est donnée par :

$$x(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi n f} \qquad \text{(I.5)}$$

En fonction de la nature (périodique ou non) de x(n), on a deux types de représentation spectrale possibles :

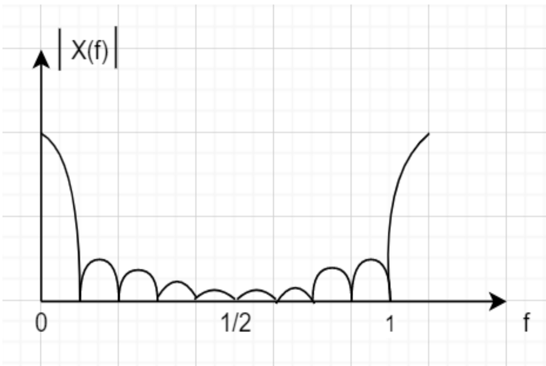
$x(n)$non périodique $\xrightarrow{\text{TFTD}}$ $X(f)$ est à support continu

$x(n)$non périodique $\xrightarrow{\text{TFTD}}$ $X(f)$ est à support discret

Exemple : 1.

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n \in [-N, N-1] \\ & 0 \; ailleurs \end{cases}$$

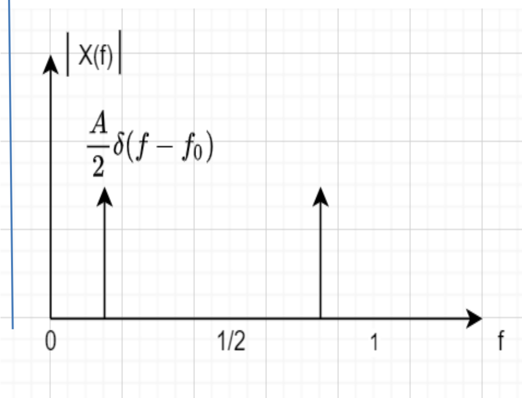
$\downarrow$ TFTD



2.

$$x \; (n) = Acos(2\pi f_0 n)$$

$\downarrow$ TFTD



5. Propriétés de la TFTD :

- $X(f)$ est une fonction complexe. Si $x(n)$ est réel : Etude sur l'intervalle de fréquence $f \epsilon \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$|X(f)|$ spectre d'amplitude est une fonction paire.

$arg\{X(f)\}$ spectre de phase est une fonction impaire.

- Linéarité :

$$a\,x(n) + b\,y(n) \xrightarrow{donne} aX(f) + bY(f) \qquad \text{(I.6)}$$

- Décalage temporel :

$$TFTD\{x(n - n_0)\} = X(f)e^{-j2\pi f n_0} \qquad \text{(I.7)}$$

- Décalage fréquentiel (ou modulation) :

$$TFTD\{x(n)e^{j2\pi f_0 n}\} = X(f - f_0) \qquad \text{(I.8)}$$

- TF de la dérivée du signal :

$$TFTD\left\{\frac{dx(n)}{dn}\right\} = j2\pi f X(f) \qquad \text{(I.9)}$$

- Relation de Parseval (conservation de l'énergie) :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(f)|^2 df \qquad \text{(I.10)}$$

- Produit de Convolution :

$$TFTD\{x(n) * y(n)\} = X(f).Y(f) \quad (I.11)$$

$$TFTD\{x(n).y(n)\} = X(f) * Y(f) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(u)Y(f-u)du \quad (I.12)$$

- TFTD Inverse :

$$x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f)e^{j2\pi nf} \quad (I.13)$$

6. La Transformée de Fourier Discrète (TFD) :

Lorsqu'on désire calculer la transformée de Fourier d'une fonction x(t) à l'aide d'un ordinateur, ce dernier n'ayant qu'un nombre fini de mots de taille finie, on est amené à:

• discrétiser la fonction temporelle,

• tronquer la fonction temporelle,

• discrétiser la fonction fréquentielle.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \quad (I.14)$$

En approchant l'intégrale par une somme d'aires de rectangles de duréeT_e et en limitant la durée d'intégration à l'intervalle $[0, (N-1)\ T_e]$, on obtient:

$$X(f) \approx T_e \sum_{n=0}^{(N-1)} x(nT_e)e^{-j2\pi fnT_e}$$

Ce qui donne pour les valeurs de fréquences :

$$f_k = {}^{kf_e}/_N$$

$$X(f_k) \approx T_e \sum_{n=0}^{(N-1)} x(nT_e)e^{-j2\pi\frac{nk}{N}f_eT_e} \approx T_e \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e)e^{-j2\pi\frac{nk}{N}} \quad (I.15)$$

Cette notation est utilisée en pratique sous le nom de TFD car il existe un algorithme de calcul efficace appelé FFT (Fast Fourier Transform) ou TFR (Transformée de Fourier rapide).

La TFD est par ailleurs utilisée, lorsque l'on travaille avec des suites numériques sans lien avec un signal physique, pour définir une représentation de la suite sur une base de fonctions fréquentielles.

7. Définition de la TFD :

On appelle transformée de Fourier discrète d'une suite de N termes $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$, la suite de N termes $X(0), X(1), \dots, X(N-1)$, définis par :

$X(k) = T_e \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi\frac{nk}{N}}$ (I.16)

En pratique, les N termes $x(n)$peuvent être N échantillons d'un signal analogique échantillonné: $x_n = x(nT_e)$ et les N termes $X(k)$ correspondre à une approximation (à un facteur multiplicatif T_e près) de la transformée de Fourier de ce signal aux N points de fréquence $f_k = k\, {f_e}/{N}$, avec k entre 0 et N −1, c'est à dire f entre 0 et fe.

- Inversion de la TFD :

$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi\frac{nk}{N}}$ (I.17)

8. Lien entre la transformée de Fourier et la TFD :

Soit x(t) un signal analogique continu.

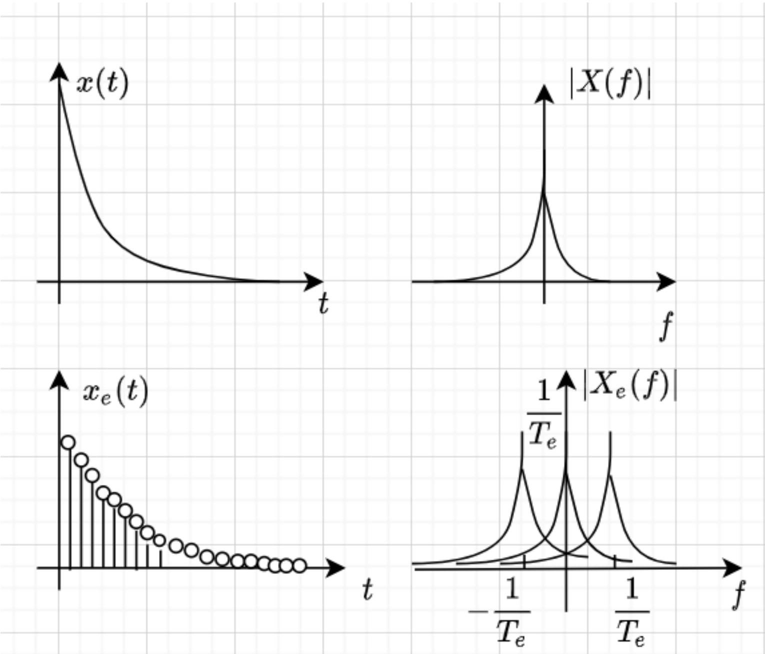
1. On échantillonne $x(t)$ à $f_e = \frac{1}{T_e}$

$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\,\delta(t - nT_e) = x(t)P(t)$ (I.18)

Où $P(t)$est la fonction peigne de Dirac ;

$$TF\{P(t)\} = P(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_e}\right)$$

L'échantillonnage rend le spectre périodique et peut entraîner un phénomène de « recouvrement de spectre » ou aliasing.



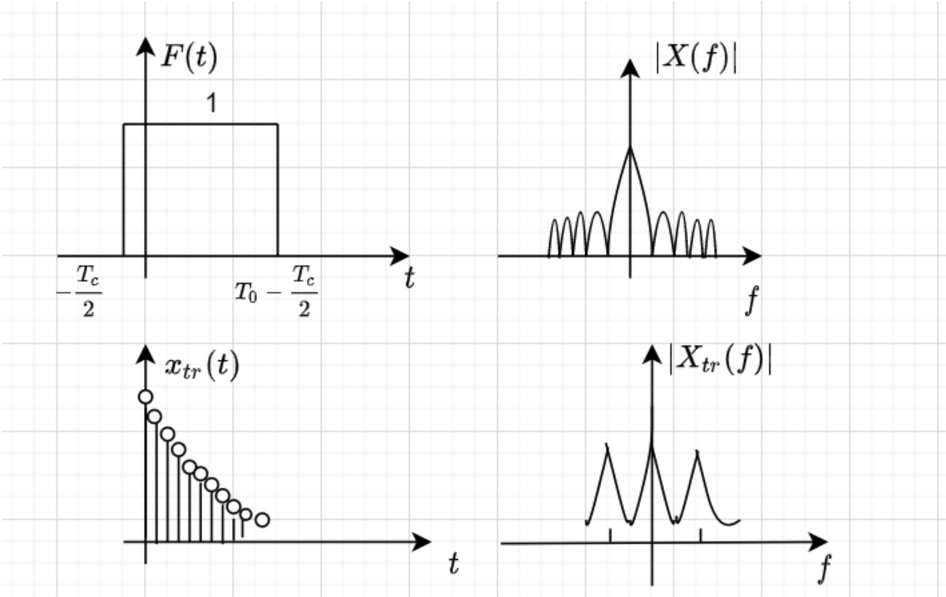
2. On tronque la suite $x_e(nT_e)$ en ne conservant qu'un nombre fini N de termes pour obtenir le signal $x_{tr}(t)$formé des échantillons: x(0)... x((N −1)Te:

$x_{tr}(t) = x_e(t)F(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e)\delta(t - nT_e) = x(t)P(t)F(t)$ (I.19)

Où $F(t)$est une porte de durée NT_e

Exemple :

$F(t) = \begin{cases} 1 \; si \; t \in \left[-\frac{T_e}{2}, T_0 - \frac{T_e}{2}\right] \\ 0 \; ailleurs \end{cases}$ avec $T_0 = NT_e$



La convolution avec un sinus cardinal introduit des ondulations sur le spectre.

$$X_{tr}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e)e^{-j2\pi f nT_e}$$

3. On échantillonne $X_{tr}(f)$ à $\frac{1}{T_0}$

   On obtient alors N valeurs différentes espacées de $\frac{1}{T_0}$ entre 0 et $\frac{1}{T_e}$, car $T_0 = nT_e$.
   Cette dernière opération rend périodique la « fonction » dans le temps.
   Appelons $x_c(t)$ la fonction résultante.

$X_c(f) = X_{tr}(f)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_{tr}(\frac{n}{T_0})\delta(f - \frac{n}{T_0}) =$

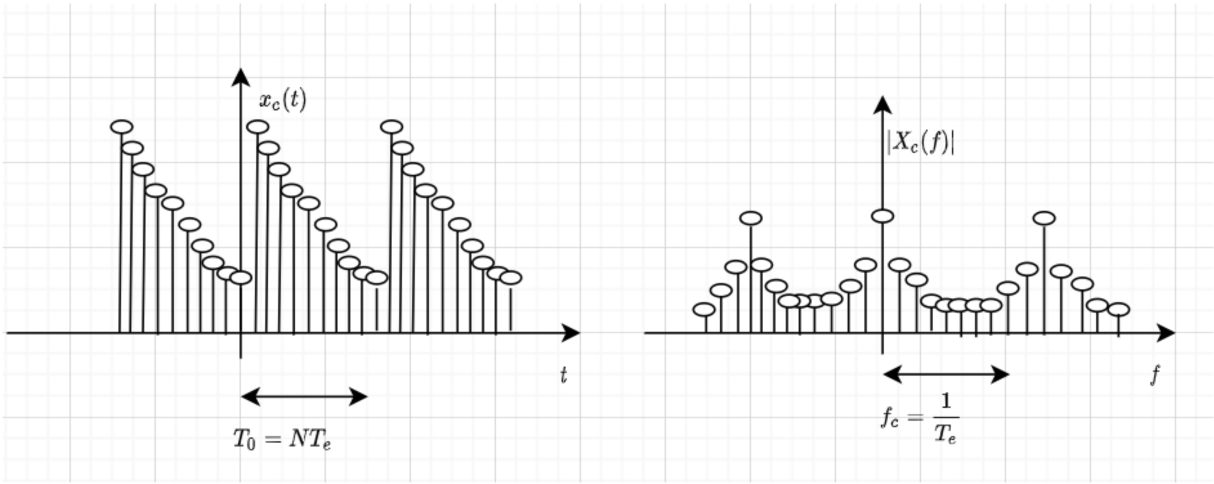
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)e^{-j2\pi\frac{nk}{N}})\delta(f - \frac{n}{T_0})$ (I.20)

$x_c(t) = T_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{tr}(t - nT_{0)}$ (I.21)

$x_c(t)$ et $X_c(f)$sont deux distributions échantillonnées reliées par la transformation de Fourier.

On obtient donc une correspondance entre N points dans le domaine temporel $x_c(nT_e)$ et N points dans le domaine fréquentiel $X_c\left(\frac{n}{T_0}\right)$, pour n entre 0 et N −1.

De plus :



$x_c(nT_e) = T_0 x(nT_e)$ pour $n\epsilon[0, N-1]$

$$X_c\left(\frac{k}{T_0}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e)e^{-j2\pi\frac{nk}{N}} \quad \text{(I.22)}$$

c'est-à-dire que la suite $x_c(k) = X(\frac{k}{T_0})$ est précisément la TFD de la suite

$x(n) = x(nT_e)$.