

**SOLUTION DE SÉRIE D'EXERCICES N°3**

**Exercice N°1 :**

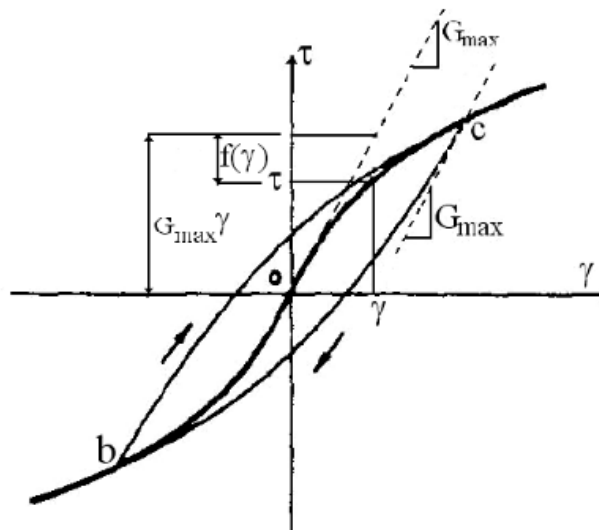
**Rappel de la règle de Masing**

On applique souvent, lors de la construction des courbes de chargement cycliques des modèles non linéaires, les deux règles de Masing (1926), basées sur l'hypothèse que l'amortissement est d'origine hystérique (ou plastique). Elles postulent que :

- 1) Au point d'inversion du sens de chargement, la pente de la courbe de chargement est égale à la pente initiale. En considérant la figure 1.1, cette règle s'écrit :

$$\left[ \frac{\partial \tau}{\partial \gamma^s} \right]_c = G_{max}$$

- 2) La courbe de chargement à partir du point C de changement du sens de chargement se déduit de celle du premier chargement par translation de l'origine en ce point et amplification des échelles des deux axes par un facteur d'homothétie égal à 2.



**Figure 1-** Construction des courbes chargement – rechargement lors d'un chargement cyclique

Selon la figure 1, on montre que la courbe de premier chargement est décrite par l'équation suivante :

$$\tau = g(\gamma^s) = G_{max}\gamma^s - f(\gamma^s)$$

La fonction  $f(\gamma^s)$  est une mesure de l'écart de la réponse du modèle par rapport à celle du modèle élastique linéaire.

En cas de déchargement, on montre que la courbe cb est décrite par :

$$\tau - \tau_c = G_{max}(\gamma^s - \gamma_c^s) + 2f\left(\frac{\gamma_c^s - \gamma^s}{2}\right)$$

Autrement dit, la courbe de déchargement peut être construite à partir du point  $(\gamma_c^s, \tau_c)$  considéré comme le centre d'un nouveau repère de contraintes et de déformations, la fonction  $f$  étant amplifiée par un facteur de 2.

Les règles de Masing sont très utiles pour l'analyse du comportement cyclique des sols en général, et en particulier l'analyse de la réponse sismique du sol.

La définition de la courbe de chargement cyclique soit définie à la base des résultats d'un essai dynamique, en termes de contraintes en fonction des déformations ou le sens contraire, à partir des deux formulations mathématiques suivantes :

$$\tau = \tau_c + G_{max}(\gamma^s - \gamma_c^s) \left[ 1 - J \left( \frac{|\gamma_c^s - \gamma^s|}{n} \right) \right]$$

$$\gamma^s = \gamma_c^s + \left( \frac{\tau - \tau_c}{G_{max}} \right) \left[ 1 + H \left( \frac{|\tau - \tau_c|}{n} \right) \right]$$

J et H étant des fonctionnelles à obtenir par calage avec les résultats expérimentaux d'un essai dynamique.

Le coefficient n vaut 1 pour la courbe du premier chargement et 2 pour les courbes de déchargement et rechargement successives.

L'indice c relatif au point de changement du sens de chargement.

On trouve les fonctionnelles J et H en reformulant les équations précédentes en cas de la courbe du premier chargement ( $\tau_c = \gamma_c = 0, n = 1$ ).

Nous avons :

$$\tau = \gamma^s G_{max} (1 - J(\gamma^s))$$

Soit :

$$J(\gamma^s) = 1 - \frac{\tau}{G_{max}}$$

De même, on obtient :

$$H(\tau) = \frac{G_{max}}{G} - 1 \quad (4.12)$$

Les fonctionnelles J et H dépendent directement du module de cisaillement normalisé qui peut être déterminé expérimentalement à partir des essais dynamiques, ou à défaut à partir des formules empiriques vues précédemment, en fonction des paramètres géotechniques du sol.

### Solution

1) La loi de comportement hyperbolique de Kondner-Zelasko est formulée comme suit :

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\varepsilon_1}{\frac{1}{E_0} + \varepsilon_1 / (\sigma_1 - \sigma_3)_u} = \frac{\varepsilon_1 E_0}{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1^R}}$$

Le terme  $\varepsilon_1^R$  est appelé déformation de référence et le rapport  $\varepsilon_1 / \varepsilon_1^R$  représente le niveau de déformation. En divisant par  $(\sigma_1 - \sigma_3)_u$  on obtient :

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_u} = \frac{\varepsilon_1 / \varepsilon_1^R}{1 + \varepsilon_1 / \varepsilon_1^R}$$

On a :  $(\sigma_1 - \sigma_3) = E \varepsilon_1$ , E étant le module de cisaillement sécant, ce qui donne :

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = E \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_1}{\frac{1}{E_0} + \varepsilon_1 / (\sigma_1 - \sigma_3)_u} = \frac{\varepsilon_1 E_0}{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1^R}}$$

On obtient alors :

$$\frac{E}{E_0} = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1^R}}$$

Et enfin,

$$1 - \frac{E}{E_0} = \frac{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1^R}}{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1^R}} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_u}$$

2) En se basant sur l'équation :

$$\tau = \tau_c + G_{max}(\gamma^s - \gamma_c^s) \left[ 1 - J \left( \frac{|\gamma_c^s - \gamma^s|}{n} \right) \right] \quad *$$

Et en remplaçant la contrainte de cisaillement  $\tau$  par le déviateur  $(\sigma_1 - \sigma_3)$ , la déformation par distorsion  $\gamma^s$  par la déformation axiale  $\varepsilon_1$ , et le module de cisaillement initial  $G_{max}$  par le module de déformation initiale  $E_0$ , la courbe de premier chargement s'obtient en imposant  $\varepsilon_1^c = 0$ ,  $(\sigma_1 - \sigma_3)_c = 0$  et  $n = 1$  :

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = E_0 \varepsilon_1 [1 - J(\varepsilon_1)]$$

3) De l'équation précédente, on calcule la fonctionnelle J, ce qui donne :

$$J(\varepsilon_1) = 1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\varepsilon_1 E_0} = 1 - \frac{\varepsilon_1 E}{\varepsilon_1 E_0} = 1 - \frac{E}{E_0} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_u} = \frac{\varepsilon_1 / \varepsilon_1^R}{1 + \varepsilon_1^R / \varepsilon_1}$$

4) D'une manière analogue, on utilise l'équation (\*) en remplaçant la contrainte de cisaillement  $\tau$  par le déviateur  $(\sigma_1 - \sigma_3)$ , la déformation par distorsion  $\gamma^s$  par la déformation axiale  $\varepsilon_1$ , et le module de cisaillement initial  $G_{\max}$  par le module de déformation initiale  $E_0$ .

$\varepsilon_1^c$  et  $(\sigma_1 - \sigma_3)_c$  représentent les coordonnées du point de passage du premier chargement .

On impose  $n=2$ , ce qui donne :

$$J \left[ \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_1^c|}{n} \right] = \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_1^c| / 2\varepsilon_1^R}{1 + |\varepsilon_1 - \varepsilon_1^c| / 2\varepsilon_1^R}$$

Et enfin, on obtient :

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_3)_c + E_0 \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^c)}{1 + \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_1^c|}{2\varepsilon_1^R}}$$

5) Selon la même démarche que la question précédente, la fonctionnelle J en cas de rechargement à partir du point  $[-\varepsilon_1^c, -(\sigma_1 - \sigma_3)_c]$  s'écrit, en imposant toujours  $n=2$  :

$$J \left[ \frac{|\varepsilon_1 - (-\varepsilon_1^c)|}{n} \right] = \frac{\frac{|\varepsilon_1 - (-\varepsilon_1^c)|}{2\varepsilon_1^R}}{1 + \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_1^c|}{2\varepsilon_1^R}} = \frac{\frac{|\varepsilon_1 + \varepsilon_1^c|}{2\varepsilon_1^R}}{1 + \frac{|\varepsilon_1 + \varepsilon_1^c|}{2\varepsilon_1^R}}$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = -(\sigma_1 - \sigma_3)_c + E_0 \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_1^c)}{1 + \frac{|\varepsilon_1 + \varepsilon_1^c|}{2\varepsilon_1^R}}$$

### **Exercice N°2 :**

1) Comme le schématise la figure 2.1, la boucle de chargement correspondant à 1 cycle de chargement est interprétée en vue de déterminer le module de déformation sécant et le coefficient d'amortissement interne pour une déformation axiale donnée  $\varepsilon_1^c$ .

L'aire de la boucle OCBC, soit  $\Delta W$ , représente la perte d'énergie par cycle, et l'aire du triangle OCD, soit  $W$ , représente l'énergie élastique stockée dans le matériau due à sa déformation.

Dans un modèle visco-élastique, comme celui de Kelvin-Voigt,  $\Delta W$  est absorbée par le piston et  $W$  est stockée dans le ressort. Enfin, la pente de la droite BC, soit  $E_s$ , représente le module de déformation sécant correspondant à une déformation axiale  $\varepsilon_1^c$ .

2) Le déviateur de contraintes s'écrit en un instant donné :  $q(t) = \sigma_v(t) - \sigma_h(t)$ ,  
 les contraintes verticales et horizontales appliquées sur l'échantillon en essai triaxial peuvent être décrites par des signaux harmoniques de la forme :

$$\sigma_v(t) = \sigma_v^0 \cos(\omega_1 t) \text{ et } \sigma_h(t) = \sigma_h^0 \cos(\omega_2 t)$$

Dans notre cas, on a :  $\omega_1 = \omega_2 = 1.57 \text{ Rad/s}$

L'amplitude du déviateur :  $q_0 = 20 \text{ kPa}$

L'énergie élastique stockée dans le ressort est :  $W = \frac{q_0(\epsilon_1^c)}{2} = \frac{2000 \times (2 \times 10^{-4})}{2} = 2 \text{ Joule/m}^3$

Le coefficient de perte s'écrit :

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W} = \frac{4 \times 10^{-1}}{2\pi \times 2} = 3.18\%$$

D'autre part, on a :  $\eta = 2\beta$

D'où, le coefficient d'amortissement matériel :

$$\beta = \frac{\eta}{2} = \frac{3.18\%}{2} = 1.6\%$$

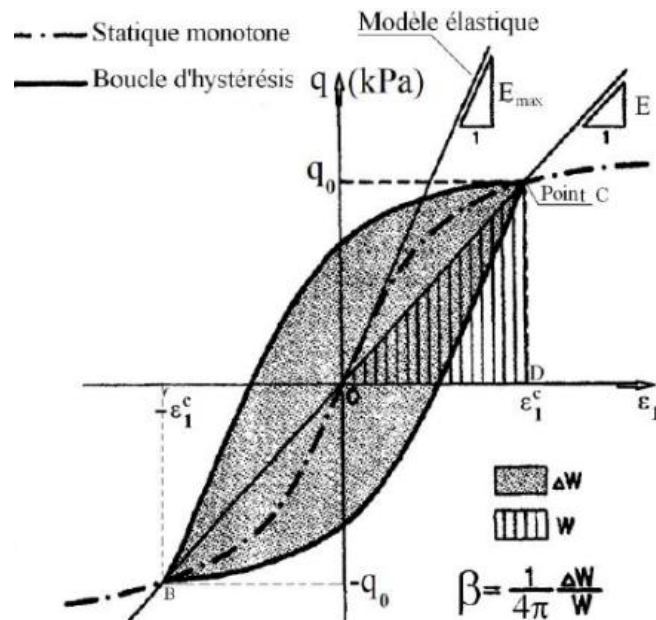


Figure 2.1- Schéma d'une boucle hystérétique