مقيــاس: المعالجة الإحصائية للبيانات التربوية 2

الأستاذة: أمينة رحمون

السداسي الثاني: للسنة أولى ماستر إرشاد وتوجيه **المعامل: 02**

الرصيد: 03

❖ **ملاحظة: يرجى من الطلبة مراجعة العلاقة الخطية وغير الخطية التي تناولناها العام الماضي.**

المحاضرة الثانية: معادلة الانحدار الخطي البسيط

يتشابه الانحدار الخطي البسيط مع الارتباط في توضيحه للعلاقة بين متغيرين. حيث أننا نحاول التوصل إلى خط مستقيم يمثل أزواج الدرجات للمتغيرين موضع الاهتمام. ونستطيع التوصل إلى معادلة لذلك الخط المستقيم باستخدام بيانات المتغيرين. فإذا رمزنا لأحد المتغيرين الرمز X والمتغير الثاني الرمز Y، فإن الانحدار الخطي يحاول التوصل إلى أفضل خط مستقيم يربط بين X وy، معنى التوصل إلى خط مستقيم يمر بمركز شكل الانتشار لدرجات x، y ويحقق شرطي المربعات الصغرى. ويوضح الخط المستقيم التغير في أحد المتغيرين x وما يقابله من تغير في المتغير الآخر y. فكل تغير في قيم المتغير x يقابله قدر ثابت من التغير في المتغير y. وهذا القدر الثابت يعتمد على ميل الخط المستقيم أو على العلاقة بين x و y.

فمفهوم الانحدار يثير اهتماما واسعا باعتباره يوفر لنا أسلوب إحصائي، يساعدنا على التنبؤ بدرجة فرد ما في اختبار معين انطلاقا من درجته في اختار آخر طالما يوجد ارتباط خطي بين درجات الاختبارين، ومعناه يتنبأ بقيم y انطلاقا من معرفته لقيم x وذلك باعتماده على خط الانحدار.

إن مفهوم الانحدار امتداد لمفهوم الارتباط، حيث يدرس العلاقات بين المتغيرات، دون الاهتمام بقوة العلاقة بين هذه المتغيرات، حيث يهتم بمقدار التغيرات الحاصلة في أحد العوامل والمصاحب لمتغيرات أخرى محددة، من خلال بناء علاقة رياضية يطلق عليها معادلة الانحدار للتنبؤ بقيم متغير معين إذا علمت قيم متغير آخر، حيث تمكننا هذه المعادلة من تحديد نسبة التغير، بينما معامل الارتباط يكتفي في بيان نوع هذه العلاقة من حيث كونها عكسية أم طردية، قوية كانت أم ضعيفة، ويرتبط الانحدار بمعامل الارتباط من حيث قوة التنبؤ بالعلاقة بين المتغيرات، فكلما كان معامل الارتباط مرتفع، تزداد الدقة بالتنبؤ بين المتغيرات (القهوجي، أبو عواد، 2018، ص.183).

❖ **شروط معادلة الانحدار:**

1. خطية العلاقة (لوحة الانتشار).
2. التوزيع الاعتدالي.
3. العينات العشوائية.
4. تجانس التباين.
5. استقلالية العينات.

❖ **العلاقة بين معاملي الانحدار والارتباط الخطي البسيط:**

إن معامل الانحدار الخطي البسيط ومعامل الارتباط الخطي البسيط يسيران في نفس الاتجاه، وإشارة ميل خط الانحدار هي نفسها إشارة معامل الارتباط الخطي، فإذا كانت العلاقة بين المتغيرين طردية فإشارتهما موجبة، وإذا كانت العلاقة بين المتغيرين عكسية فإشارتهما سالبة.

❖ **الشكل العام لنموذج الانحدار الخطي البسيط بين متغيرين:**

الشكل العام لمعادلة الانحدار الخطي البسيط بين متغيرين كالتالي:

$$\hat{y} = a + b\,(x) + SEE$$

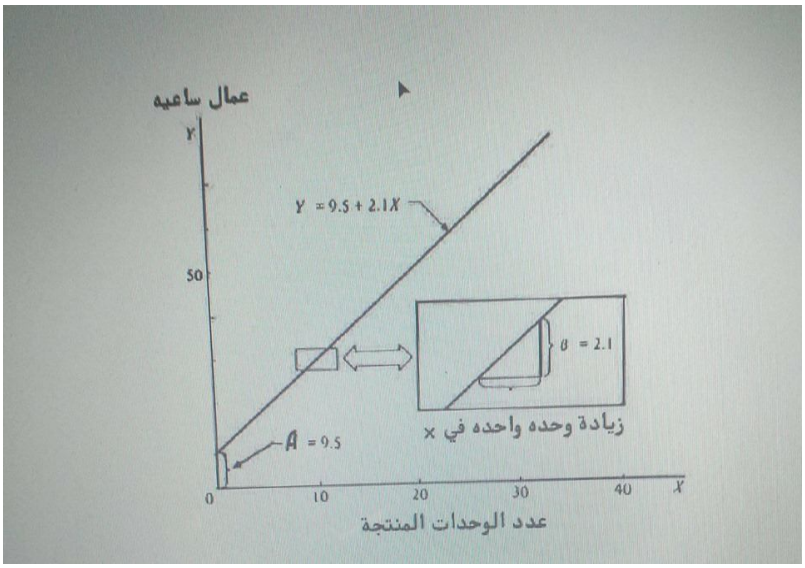
ŷ: المتغير التابع.

X: المتغير المستقل.

a: ثابت الانحدار، وتمثل نقطة تقاطع الخط مع محور y، وتمثل ايضا قيمة y عندما x تساوي 0.

b: تمثل مدى ارتفاع الخط أو مدى ميله، معنى ميل خط الانحدار، معنى درجة التغير الذي يحدث في y كلما حولنا بوحدة واحدة في متغير x .

SEE: الخطأ المعياري للتقدير (Standard Error of The Estimate)، أو الخطأ المعياري للتنبأ.



الشكل يمثل نموذج عن معادلة الانحدار الخطي البسيط

- بالنسبة للقوانين:
- لحساب المعادلة التقديرية للانحدار الخطي البسيط عندنا طريقتين:

1. **طريقة المربعات الصغرى:**

$$\hat{y} = a + b\,(x)$$

$$b = \frac{n\sum x.y - \sum x.\sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$a = \bar{y} - b\,(\bar{x})$$

2. **إذا علمنا قيمة معامل الارتباط البسيط بين x و y كالتالي:**

$$\hat{y} = a + b\,(x)$$

$$b = \frac{sy}{sx} \times r$$

$$r = \frac{n\sum(x.y) - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{\left[n\sum x^2 - (\sum x)^2\right]\left[n\sum y^2 - (\sum y)^2\right]}}$$

$$a = \bar{y} - b\,(\bar{x})$$

Sy: الانحراف المعياري للمتغير y.

Sx: الانحراف المعياري للمتغير x.

r : معامل الارتباط بين المتغيرين

مثال: فيما يلي بيانات عن عدد ساعات المراجعة في الأسبوع لعينة من 8 تلاميذ في السنة الثالثة ثانوي، ودرجات تحصيلهم الدراسي في مادة الرياضيات.

ساعات المراجعة (x)	12	14	25	30	40	45	50	60
التحصيل الدراسي (y)	12	14	15	15	14	16	17	16

- **المطلوب:**

- ارسم لوحة الانتشار؟
- ما هي توقعاتك للعلاقة ين المتغيرين؟
- أكتب معادلة الانحدار الخطي البسيط؟
- فسر المعادلة؟
- تنبأ بدرجة التحصيل الدراسي إذا كان عدد ساعات المراجعة 35 ساعة، 20 ساعة؟

- **الإجابة:**

1. لو رسمنا لوحة الانتشار نلاحظ أن القيم تقترب من بعضها البعض، والعلاقة بين المتغيرين يمكن تمثيلها بخط مستقيم. (راجع لوحة الانتشار في معامل الارتباط).
2. نتوقع أن العلاقة قوية وموجبة بين المتغيرين من خلال ملاحظة القيم في الجدول.
3. **كتابة معادلة الانحدار الخطي البسيط:**

❖ **الطريقة الأولى: طريقة المربعات الصغرى:**

$$\hat{y} = a + b\,(x)$$

$$b = \frac{n \sum x.y - \sum x.\sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$a = \bar{y} - b\,(\bar{x})$$

n	ساعات المراجعة (x)	التحصيل الدراسي (y)	x.y	X^2
1	12	12	144	144
2	14	14	196	196
3	25	15	375	625

4	30	15	450	900
5	40	14	560	1600
6	45	16	720	2025
7	50	17	850	2500
8	60	16	960	3600
∑	276	119	4255	11590

- نجمع درجات كل من درجات المتغيرين x وy لجميع أفراد العينة فنتحصل على مجموع x ومجموع y.
- نضرب كل درجة من درجات x في الدرجة المقابلة لها من درجات y ثم نجمع حواصل الضرب فينتج مجموع x.y
- نربع درجات المتغير x، ثم نجمع هذه المربعات لكل أفراد العينة فينتج مجموع مربعات x.
- نحسب متوسطي المتغيرين x و y. المتوسط الحسابي ل x يساوي 34.50، والمتوسط الحسابي ل y يساوي 14.875.
- **ثم نحسب ما يلي:**
- **نحسب b:**

$$b = \frac{n\sum x.y - \sum x.\sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$b = \frac{8\,(4255) - (276)(119)}{8(11590) - (276)^2}$$

$$b = \frac{34040 - 32844}{92720 - 76176}$$

$$b = \frac{1196}{16544}$$

b= 0.072

- نحسب a:

$$a = \bar{y} - b\,(\bar{x})$$

a = 14.875 – 0.072 (34.50)

a = 12.921

- وأخيرا نكتب معادلة الانحدار:

$$\hat{y} = a + b\,(x)$$

$$\hat{y} = 12.921 + 0.072\,(x)$$

4- التفسير: يدل على أنه كلما زادت ساعات المراجعة ساعة واحدة، حدث زيادة في التحصيل بمقدار 0.072.

5- نتنبأ بدرجة التحصيل الدراسي إذا كان عدد ساعات المراجعة 35 ساعة، 20 ساعة.

هنا نقوم التعويض في المعادلة $\hat{y} = 12.921 + 0.072\,(x)$ ، مكان X، نضع 35، ثم 20.

❖ درجة التحصيل الدراسي إذا كان عدد ساعات المراجعة 35 هي **15** كالتالي:

$$\hat{y}=12.921 + 0.072\,(35)$$

$\hat{y}=$ **15.44** بالتقريب15

❖ درجة التحصيل الدراسي إذا كان عدد ساعات المراجعة 20 هي **14** كالتالي:

$$\hat{y}=12.921 + 0.072\,(20)$$

$\hat{y}=$ **14.36** بالتقريب 14

الطريقة الثانية: حساب معامل الانحدار b إذا علمنا قيمة معامل الارتباط البسيط بين x و y.

$$\hat{y} = a + b\,(x)$$

$$b = \frac{sy}{sx} \times r$$

$$r = \frac{n\sum(x.y) - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}}$$

$$a = \bar{y} - b(\bar{x})$$

n	ساعات المراجعة (x)	التحصيل الدراسي (y)	x.y	X^2	y^2
1	12	12	144	144	144
2	14	14	196	196	196
3	25	15	375	625	225
4	30	15	450	900	225
5	40	14	560	1600	196
6	45	16	720	2025	256
7	50	17	850	2500	289
8	60	16	960	3600	256
∑	276	119	4255	11590	1787

- نجمع درجات كل من درجات المتغيرين x وy لجميع أفراد العينة فنتحصل على مجموع x ومجموع y.
- نضرب كل درجة من درجات x في الدرجة المقابلة لها من درجات y ثم نجمع حواصل الضرب فينتج مجموع x.y
- نربع درجات المتغير x، ثم نجمع هذه المربعات لكل أفراد العينة فينتج مجموع مربعات x.
- نربع درجات المتغير Y، ثم نجمع هذه المربعات لكل أفراد العينة فينتج مجموع مربعات Y.
- نحسب الانحراف المعياري للمتغيرين x و y.

$$sx = \sqrt{\frac{n\sum x^2 - (\sum x)^2}{n(n-1)}}$$

$$sx = \sqrt{\frac{8(11590) - (276)^2}{8(8-1)}}$$

$$sy = \sqrt{\frac{n\sum Y^2 - (\sum Y)^2}{n(n-1)}}$$

$$sy = \sqrt{\frac{8(1787) - (119)^2}{8(8-1)}}$$

$$sy = 1.55$$

نحسب معامل الارتباط بيرسون:

$$r = \frac{n\sum(x.y) - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}}$$

$$r = \frac{1196}{1494.46}$$

$$r = 0.80$$

- **ثم نحسب ما يلي:**
- **نحسب b:**

$$b = \frac{sy}{sx} . r$$

$$b = \frac{1.55}{17.19} .0.80$$

$$b = 0.072$$

- نحسب a:

$$a = \bar{y} - b(\bar{x})$$

$$a = 14.875 - 0.072\ (34.50)$$

$$a = 12.921$$

- وأخيرا نكتب معادلة الانحدار:

$$\hat{y} = a + b\ (x)$$

$$\hat{y} = 12.921 + 0.072\ (x)$$

4- التفسير: يدل على أنه كلما زادت ساعات المراجعة ساعة واحدة، حدث زيادة في التحصيل بمقدار 0.072.

5- نتنبأ بدرجة التحصيل الدراسي إذا كان عدد ساعات المراجعة 35 ساعة، 20 ساعة.

هنا نقوم التعويض في المعادلة $\hat{y} = 12.921 + 0.072\ (x)$ ، مكان X، نضع 35، ثم 20.

❖ درجة التحصيل الدراسي إذا كان عدد ساعات المراجعة 35 هي **15** كالتالي:

$$\hat{y}=12.921 + 0.072\ (35)$$

$\hat{y}=$ **15.44** بالتقريب15

❖ درجة التحصيل الدراسي إذا كان عدد ساعات المراجعة 20 هي **14** كالتالي:

$$\hat{y}=12.921 + 0.072\ (20)$$

$\hat{y}=$ **14.36** بالتقريب 14

❖ **ملاحظة:** على الطالب استخدام الطريقة المناسبة حسب معطيات التمرين.

المراجع التي تم الاعتماد عليها:

- النطفنجي، محمد عبد الحميد. (1982). استخدام برنامج SAS في معالجة مسائل الانحدار الخطي البسيط. الرياض: مركز البحوث جامعة الملك سعود.

- النجار، نبيل جمعة صالح. (2010). الإحصاء في التربية والعلوم الإنسانية مع تطبيقات برمجية SPSS. (ط1). عمان: دار حامد للنشر والتوزيع.

- مراد، صلاح أحمد، هادي فوزية عباس، وجاد الرب، هشام فتحي. (2017). الاحصاء الاستدلالي في العلوم السلوكية. (ط1). القاهرة: دار الكتاب الحديث.

- القهوجي، أيمن سليمان، أبو عواد، فريال محمد. (2018). النمذجة بالمعادلات البنائية استخدام برنامج أموس. (ط1). عمان: دار وائل للنشر والتوزيع.