المتغيرات العشوائية

مقدمة:

المتغير العشوائي هو الذي يأخذ قيما حقيقية مختلفة تعبر عن نتائج التجربة العشوائية، ومن ثم مجال هذا المتغير يشمل كل القيم الممكنة له، ويكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين.

يرمز للمتغير العشوائي بشكل عام بحرف من الحروف الكبيرة **X**، **Y**، **Z** ...إلخ وللقيم التي يمكن أن يأخذها بالحروف الصغيرة **x**، **y**، **z** ...إلخ، وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

1- **المتغيرات العشوائية المنفصلة (المتقطعة):** هي المتغيرات التي تكون مجموعة قيمها الممكنة قابلة للعد.

2- **المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة):** هي المتغيرات التي تكون مجموعة قيمها الممكنة غير قابلة للعد وتكون قابلة للقياس.

1. المتغيرات العشوائية المنفصلة:

1.1. تعريف:

المتغير العشوائي المنفصل هو الذي يأخذ قيم بينية ومتباعدة، ومن أمثلة هذه المتغيرات:

- عدد الأولاد الذكور في الأسرة المكونة من أربع أولاد، $X = \{0,1,2,3,4\}$.
- عدد العملاء الذين يتم إنهاء خدمتهم البنكية كل 10 دقائق، $Y=\{0,1,2,3,....\}$.
- عدد مرات استخدام نوع معين من الأسمدة خلال الدورة الزراعية.
- عدد الوحدات التالفة من إنتاج مزرعة معينة تنتج 200 وحدة كل موسم.
- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر.

2.1. التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل:

التوزيع الاحتمالي، هو الذي يبين احتمالات حدوث القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير، والتي ترتبط باحتمالات النتائج الممكنة، وبمعنى آخر هو التكراري النسبي للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير.

فإذا كان المتغير العشوائي المنفصل X يأخذ القيم، $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$، وكان $P(X = x_i) = f(x_i)$ هو احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ القيمة x_i، فإنه، يمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، وهو جدول مكون من عمودين (أو سطرين)، الأول به القيم الممكنة للمتغير العشوائي وتكون مرتبة تصاعديا $X : \{x = x_1, x_2, ..., x_n\}$ ، والثاني به القيم الاحتمالية لهذا المتغير $P(X = x_i) = f(x_i)$.

- **جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل:**

x_i	$f(x_i)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$
Σ	1

وعليه فإن جدول التوزيع الاحتمالي يبين كيفية توزيع الاحتمالات بدلالة قيم المتغير العشوائي وهو ما يعرف بدالة الاحتمال ويرمز لها بالرمز $f(x_i)$ ، ومن خصائص هذه الدالة ما يلي:

$$0 < f(x_i) < 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$$

3.1. التمثيل البياني لدالة الاحتمال :

بما أن المتغير العشوائي هو متغير كمي منفصل فإن التمثيل البياني لدالة الاحتمال يكون بطريقة الأعمدة البيانية البسيطة.

4.1. دالة التوزيع التراكمية :

دالة التوزيع التراكمية هي دالة تجميعية لدالة الكثافة الاحتمالية، أي أنها تشمل الاحتمالات الناتجة من حساب الاحتمال $P(X \leq x)$. يرمز لدالة التوزيع الاحتمالي التجميعي بالرمز $F(x)$، وهي معرفة كما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

إن دالة التوزيع التراكمي تشبه التكرار التجميعي الصاعد النسبي لذلك يكون تمثيلها البياني بقطع مستقيمة.

خصائص:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$
$$P(X > a) = 1 - F(a)$$

5.1. الأمل الرياضي (التوقع الرياضي):

الأمل الرياضي هو مقياس من مقاييس النزعة المركزية يمثل القيمة التي تتمركز حولها قيم **P**، يرمز له بالرمز **E(X)** أو **μ** حيث:

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)$$
$$= x_1 \times P_1 + x_2 \times P_2 + \cdots + x_n \times p_n$$

- **أهم خواص التوقع الرياضي:**

E(c) = c
E(E(x)) = E(x)
E(cX) = c E(X)
E(x±c) = E(x) ± E(c) = E(x) ±c

c: ثابت.

6.1. التباين :

يقيس التباين تمركز أو تشتت قيم المتغير حول المتوسط (μ) فإذا كانت قيمته صغيرة دل ذلك على تمركز القيم حول المتوسط، أما إذا كانت قيمه كبيرة فيدل ذلك على أن قيم المتغير مشتتة حول المتوسط (μ)، يرمز له بالرمز **V(X)** حيث:

$$V(X) = \sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \times \left(x_i - E(X)\right)^2$$
$$= E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

لدينا:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times P(X = x_i)$$

- أهم خواص التباين:

V(c) = 0
V(cx) = c² V(x)
V(c±x) = V(x)

7.1. الانحراف المعياري:

هو الجذر التربيعي للتباين، يرمز له بالرمز σ_X ونكتب:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

مثـال:

إذا كان من المعلوم أن نسبة مبيعات أحد المراكز التجارية من التفاح الأمريكي **0.60**، بينما يكون نسبة مبيعاته من الأنواع الأخرى للتفاح **0.40**، اشترى أحد العملاء عبوتين، والمطلوب:

1. كون مجموعة الحالات الممكنة.
2. إذا عرفنا المتغير العشوائي X بأنه عدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي، فأوجد الآتي:

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ؛
- ارسم دالة الاحتمال لهذا المتغير؛
- كون التوزيع الاحتمالي التجميعي؛
- ما هو احتمال $P(X=1)$ ، $P(X \le 1)$ ، $P(X=1.5)$ ، $P(X \le 1.5)$ ؛
- حدد قيمة الأمل الرياضي والانحراف المعياري لعدد العبوات المشتراة من النوع الأمريكي.

الحـل:

1. تكوين مجموعة الحالات الممكنة:

التجربة هنا هي شراء وحدتين من عبوات التفاح، ومن ثم مجموعة الحالات الممكنة تتكون من أربع نتائج، هي:

2. **X**: عدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي.

- **التوزيع الاحتمالي لعدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي:**

من المعلوم أن العميل اشترى عبوتين، وأن المتغير العشوائي هو عدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي، لذا تكون القيم الممكنة للمتغير العشوائي هي:

$x=0$: إذا كانت العبوتين من النوع الآخر، أى إذا كانت نتيجة التجربة (آخر، آخر).

$x=1$: إذا كان أحد العبوتين من النوع الأمريكي، أي إذا كانت نتيجة التجربة (آخر، أمريكي) أو (أمريكي، آخر).

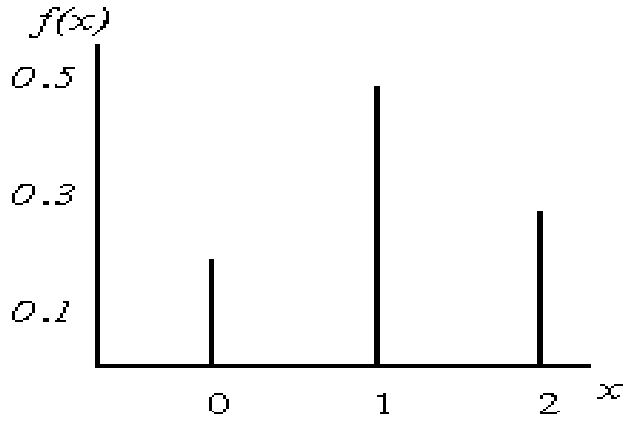
$x=2$: إذا كانت العبوتين من النوع الأمريكي، أي إذا كانت نتيجة التجربة (أمريكي، أمريكي).

ومن ثم يأخذ المتغير القيم: $X=\{0,1,2\}$ ، وترتبط احتمالات هذه القيم باحتمالات نتائج التجربة المناظرة لها كما هو مبين أعلاه، ومن ثم يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو:

جدول التوزيع الاحتمالي لعدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي:

$X=x_i$	$P(X=x_i)$
0	0.16
1	0.48
2	0.36
Σ	1

- **رسم دالة الاحتمال** $f(x)$:



- **تكوين التوزيع الاحتمالي التجميعي:**

جدول التوزيع الاحتمالي، والتوزيع التجميعي لعدد العبوات المشتراه من التفاح الأمريكي:

X=xi	P(X=xi)	F(xi)
0	0.16	$F(0) = P(X \le 0) = 0.16$
1	0.48	$F(1) = P(X \le 1) = 0.16 + 0.48 = 0.64$
2	0.36	$F(2) = P(X \le 2) = 0.64 + 0.36 = 1.00$
Σ	1	

- حساب الاحتمالات: $P(X = 1)$ ، $P(X \le 1)$ ، $P(X = 1.5)$ ، $P(X \le 1.5)$

$$P(X = 1) = f(1) = 0.48$$
$$P(X \le 1) = F(1) = 0.64$$
$$P(X = 1.5) = f(1.5) = 0$$
$$P(X \le 1.5) = F(1.5) = F(1) = 0.64$$

- **الأمل الرياضي والانحراف المعياري لعدد العبوات المشتراة من النوع الأمريكي:**

لحساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري يتم استخدام المعادلات التالية:

$$\mathsf{E}(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times P(X = x_i) - \left(E(X)\right)^2$$

وهذا يتطلب تكوين جدول يشمل المجاميع التالية: $\sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)$ و $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times P(X = x_i)$ وذلك كما يلي:

X=xi	P(X=xi)	xi× P(X=xi)	$x_i^2 \times P(X = x_i)$
0	0.16	0	0
1	0.48	0.48	0.48
2	0.36	0.72	1.44
Σ	1	1.20	1.92

إذا الأمل الرياضي هو: $E(X) = \mu = 1.20$

أ- ولحساب الانحراف المعياري يجب أولا حساب التباين وهو:

$$V(X) = 1.92 - (1.20)^2 = 0.48$$

إذا الانحراف المعياري قيمته هي:

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.48} = 0.693$$