Chapitre 5 :
Méthode des volumes finis pour le problème transitoire

1. Discrétisation de l'équation différentielle

Considérons l'équation de transport d'une variable par diffusion sous sa forme générale, dans le cas instationnaire et sans terme source :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)$$

Le terme instationnaire de Φ est représenté par $\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}$

Le terme traduit le transport diffusif de Φ $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)$

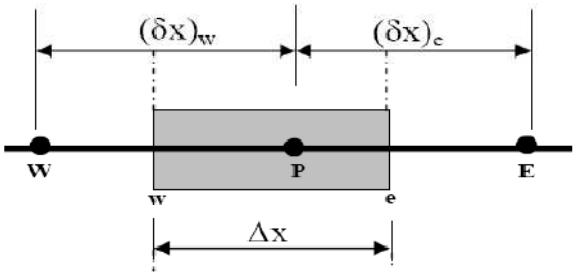
On va appliquer la méthode du volume fini pour un problème de transfert de chaleur instationnaire en monodimensionnel. L'équation de transport à discrétisé s'écrit sous la forme :

$$\rho C_P\frac{\partial(T)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

ρC_P =constante.

Soit le temps t qui varie de t ⟶ t+Δt ⟶ t+2Δt (Δt est le pas de temps)
La température varie de T_P^0 ⟶ T_P^1 ⟶ T_P^2
Connue inconnue

La discrétisation du domaine 1D:



La résolution de l'équation nécessite 03 conditions limites

x= 0 ⟶ $T=T^1$
x =L ⟶ $T=T^L$
t=0 ⟶ T

Discrétisation de l'équation :

$$\rho C_P\int_w^e\int_t^{t+\Delta t}\frac{\partial(T)}{\partial t}dtdx = \int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)dxdt$$

$$\rho C_P \int_w^e \left(T^1{}_P - T^0{}_P\right)dx = \rho C_P \left(T^1{}_P - T^0{}_P\right)\Delta x$$

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)dxdt = \int_t^{t+\Delta t}\left[k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w\right]dt$$

$$\int_t^{t+\Delta t}\left[k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w\right]dt = \int_t^{t+\Delta t} k\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x_e} - k\frac{T_P - T_W}{\delta x_w}\right)dt$$

Le profil de la variation de la température T n'est pas nécessairement le même pour le temps t et l'espace x. On doit choisir un profil de variation de T en fonction du temps, on fait intervenir une fonction de pondération tel que :

$$\int_t^{t+\Delta t} T_P dt = \left[fT_P{}^1 + (1-f)T^0{}_P\right]\Delta t$$

f : facteur de pondération $0 \le f \le 1$

Dans ce cas on a :

$$\int_t^{t+\Delta t}\left[k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w\right]dt = \left[kf\frac{T^1{}_E - T^1{}_P}{\delta x_e} + (1-f)k\frac{T^0{}_E - T^0{}_P}{\delta x_e}\right]\Delta t - \left[kf\frac{T^1{}_P - T^1{}_W}{\delta x_w} + (1-f)k\frac{T^0{}_P - T^0{}_W}{\delta x_w}\right]\Delta t$$

$$\int_t^{t+\Delta t}\left[k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w\right]dt = \frac{k}{\delta x_e}\left[fT^1{}_E + (1-f)T^0{}_E\right]\Delta t + \frac{k}{\delta x_w}\left[fT^1{}_W + (1-f)T^0{}_W\right]\Delta t$$

$$-f\left[\frac{k}{\delta x_e} + \frac{k}{\delta x_w}\right]T^1{}_P\Delta t - (1-f)\left[\frac{k}{\delta x_e} + \frac{k}{\delta x_w}\right]T^0{}_P\Delta t$$

Equation générale s'écrit alors :

$$(\rho C_P\frac{\Delta x}{\Delta t} + f(a_E + a_W))T^1{}_P = a_E\left[fT^1{}_E + (1-f)T^0{}_E\right] + a_W\left[fT^1{}_W + (1-f)T^0{}_W\right] +$$

$$(\rho C_P\frac{\Delta x}{\Delta t} - (1-f)[a_E + a_W])T^0{}_P$$

$$a_{\cdot\cdot P}T^1{}_P = a_E\left[fT^1{}_E + (1-f)T^0{}_E\right] + a_W\left[fT^1{}_W + (1-f)T^0{}_W\right] + a^0{}_P T^0{}_P$$

Avec :

$$a_P = \rho C_P\frac{\Delta x}{\Delta t} + f(a_E + a_W)$$

$$a_E = \frac{k}{\delta x_e}$$

$$a_W = \frac{k}{\delta x_w}$$

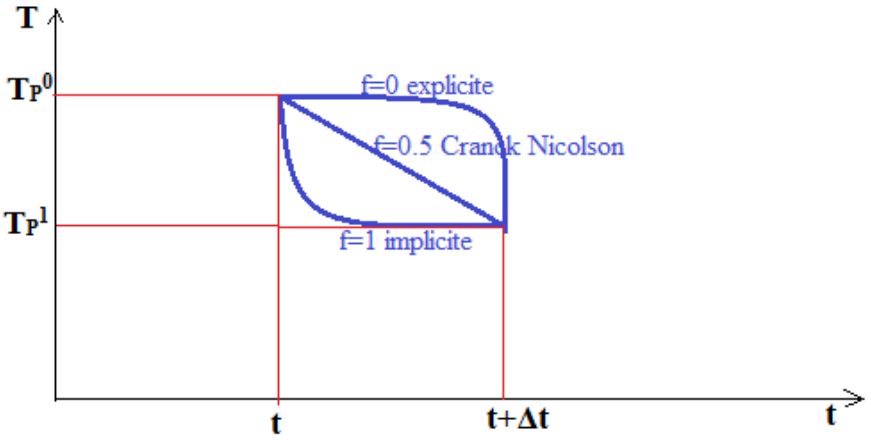
$$a^0{}_P = \rho C_P \frac{\Delta x}{\Delta t} - (1-f)(a_E + a_W)$$

Si f=0 le schéma de discrétisation est dite explicite

Si f= 1 le schéma de discrétisation est dite totalement implicite

Si f=0.5 le schéma de discrétisation est dite de Cranck Nicolson

Explication physique de l'équation les valeurs de f.



2- Schéma explicite (explicit scheme)

Dans ce cas on a f = 0

L'équation s'écrit :

$$(\rho C_P \frac{\Delta x}{\Delta t}) T^1{}_P = a_E [T^0{}_E] + a_W [T^0{}_W] + (\rho C_P \frac{\Delta x}{\Delta t} - [a_E + a_W]) T^0{}_P$$

On pose $a_P{}^0 = \rho C_P \frac{\Delta x}{\Delta t} - [a_E + a_W]$

$$(\rho C_P \frac{\Delta x}{\Delta t}) T^1{}_P = a_E [T^0{}_E] + a_W [T^0{}_W] + a^0{}_P T^0{}_P$$

On constate que la valeur de la temperature T_P^1 est donnée explicitement en fonction de T_E^0, T_W^0 et T_P^0 qui sont des valeurs connues.

Pour satisfaire la règle n° 02, on doit avoir $\mathbf{a_P{}^0 \geq 0}$

Si $\mathbf{a_P{}^0 \geq 0}$

$$\rho C_P \frac{\Delta x}{\Delta t} \geq [a_E + a_W]$$

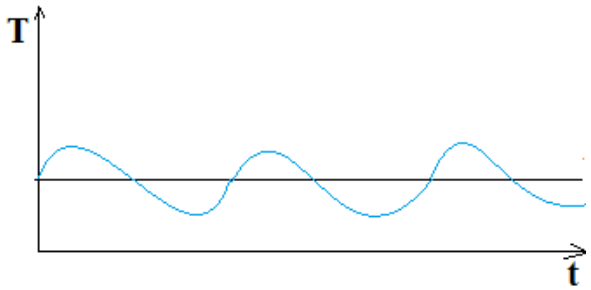
$$\rho C_P \frac{\Delta x}{\Delta t} \geq \left[\frac{k}{\delta x_e} + \frac{k}{\delta x_w}\right] \quad \Delta x = \delta x_e = \delta x_w \qquad \rho C_P \frac{\Delta x}{\Delta t} \geq \left[\frac{k}{\Delta x} + \frac{k}{\Delta x}\right]$$

$$\rho C_P \frac{\Delta x}{\Delta t} \geq \left[\frac{2k}{\Delta x}\right] \quad \rho C_P \frac{\Delta x^2}{2.k.\Delta t} \geq 1$$

Le critère de stabilité :

$$\boxed{\Delta t \leq \frac{\rho C_P \Delta x^2}{2.k.}}$$

C'est la condition d'un schéma explicite stable



L'inconvénient dans un schéma explicite, si on veut avoir des résultats précis on doit diminuer le pas spatiale Δx et ceci nous oblige a prendre un pas temporaire Δt plus petit.

3- Schéma implicite (fully implicit scheme)

Dans ce cas on a f = 1

L'équation s'écrit :

$$(\rho C_P \frac{\Delta x}{\Delta t} + f(a_E + a_W))T^1{}_P = a_E[T^1{}_E] + a_W[T^1{}_W] + (\rho C_P \frac{\Delta x}{\Delta t})T^0{}_P$$

On constate que la valeur de la température T_P^1 est donnée implicitement en fonction de T_E^1 et T_W^1 qui ne sont pas des valeurs connues.
Il n'y a pas de critère de stabilité, ce schéma est toujours stable puisque tout les coefficients sont toujours positifs.

4- Schéma Crousk Nicolson

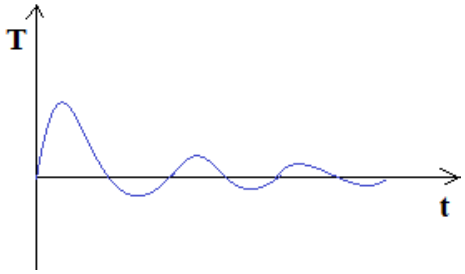
Dans ce cas on a f = 0.5

$$(\rho C_P \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{1}{2}(a_E + a_W))T^1{}_P = \frac{a_E}{2}[T^1{}_E - T^0{}_E] + \frac{a_W}{2}[T^1{}_W + T^0{}_W] +$$
$$(\rho C_P \frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{1}{2}[a_E + a_W])T^0{}_P$$

$$\rho C_P \frac{\Delta x}{\Delta t} \geq \left[\frac{k}{\Delta x}\right]$$

$$\Delta t \leq \frac{\rho C_P \Delta x^2}{k}$$

Conditions de stabilité du schéma de N C



Le schéma de Crousk Nicolson est dit inconditionnellement stable. Si le critère sur Δt est vérifie, le schéma de Crousk Nicolson est plus précis.