Chapitre 4:

Méthode des volumes finis pour les problèmes de convection-diffusion.

4.1- Introduction

L'équation de transport d'une variable par convection -diffusion sous sa forme générale, dans le cas stationnaire et sans terme source :

$$\frac{\partial(\rho u_i \phi)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)$$

Le terme traduit le transport convectif de Φ $\dfrac{\partial(\rho u_i \phi)}{\partial x_i}$

Le terme traduit le transport diffusif de Φ $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \dfrac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)$

La forme de l'équation (4-1) pour un problème a une seule dimension (1D), donne:

$$\frac{d(\rho u \phi)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)$$

Discrétisation de cette équation :

$$\int_w^e \frac{d(\rho u \phi)}{dx} dx = \int_w^e \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) dx$$

$$(\rho u \phi)_w - (\rho u \phi)_e - = \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)_w - \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)_e$$

Pour le terme de la diffusion nous avons :

$$\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)_w = \Gamma \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x}$$

$$\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)_e = \Gamma \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x}$$

On définit les deux coefficients suivants :

F: flux convectif $F = \rho U$

D : flux diffusif ; $D = \dfrac{\Gamma}{\Delta x}$

Pour estimer les valeurs des termes convectifs nous avons plusieurs schémas, le choix est dépond du nombre adimensionnel de Peclet qui représente le rapport du flux convectif sur le flux diffusif:

$$Pe = \frac{\rho u}{\Gamma / \Delta x} = \frac{F}{D}$$

- Si $Pe \rightarrow 0$ dans ce cas la vitesse est nulle, le fluide réagi comme un corps solide
- Si $Pe \rightarrow \infty$ le flux convectif est dominant

4.2- Schema centré (*Centered Differencing Scheme, CDS*):

Pour ce schéma, on suppose que Φ varie linéairement entre deux nœuds successifs donc, on prenant la valeur moyenne des Φ comme suit :

$$\phi_w = \frac{\phi_p + \phi_W}{2}$$

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2}$$

L'équation devient

$$(\rho u)_w \frac{\phi_W + \phi_P}{2} - (\rho u)_e \frac{\phi_E + \phi_P}{2} - = \Gamma\left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_w}\right)_w - \left(\Gamma \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_e}\right)_e$$

Posons $F_e = (\rho U)_e \quad F_w = (\rho U)_w \quad D_e = \frac{\Gamma}{\Delta x_e} \quad D_w = \frac{\Gamma}{\Delta x_w}$

On a l'équation sous la forme :

$$F_e \frac{\phi_E + \phi_P}{2} - F_w \frac{\phi_W + \phi_P}{2} - = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

Et après arrangement:

$$\left(\left(D_w - \frac{F_w}{2}\right) + \left(D_e + \frac{F_e}{2}\right)\right)\phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right)\phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right)\phi_E$$

$$\left(\left(\frac{1}{2}(F_e - F_w)\right) + (D_e + D_w)\right)\phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right)\phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right)\phi_E$$

L'équation discrétisé est de la forme

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W$$

Avec

$$a_p = a_E + a_W + (F_e - F_w)$$

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2}$$

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2}$$

Lorseque l'equation de continuité est verfié $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$

Dans le cas stationnaire on a $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$ ρu= constante $(\rho u)_e - (\rho u)_w = 0$ $F_e = F_w$

Alors on déduit que : $a_p = a_E + a_W$ a_E et a_W doivent etre positif selon la regle 01. De ce faite $D_e - \left|\frac{F_e}{2}\right| \geq 0$ $D_e \geq \left|\frac{F_e}{2}\right|$ $\frac{|F_e|}{D_e} \leq 2$

4.3- Schéma avant (*Upwind Differencig Scheme, UDS*)

Ce schéma suit le sens de la vitesse, si u est supposée positive dans la direction de x:

$F_w \geq 0 et F_e \geq 0 : \phi_w = \phi_W$ et $\phi_e = \phi_p$

$$(\rho u \phi)_w - (\rho u \phi)_e - = \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)_w - \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)_e$$

L'équation devient:

$$(\rho u)_w (\phi)_w - \Gamma\left(\frac{\phi_p - \phi_W}{dx_w}\right) - (\rho u)_e (\phi)_e + \Gamma\left(\frac{\phi_E - \phi_P}{dx_e}\right) = 0$$

$$F_W (\phi)_w - D_W (\phi_P - \phi_W) - F_e (\phi)_e + D_e (\phi_E - \phi_P) = 0$$

$$(F_w + D_w + D_e)\phi_p = D_e \phi_E + (F_w + D_w)\phi_W$$

Et après arrangement:

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W$$
$$a_E = D_e$$
$$a_W = F_w + D_w$$

Si la vitesse u est supposée négative :

$F_w \leq 0 : \phi_w = \phi_W$ et $F_w \leq 0 : \phi_e = \phi_E$

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W$$
$$a_E = D_e - F_e$$
$$a_W = D_w$$

Une forme de notation générale pour les coefficients qui couvre les deux sens d'écoulement est donnée ci-dessous:

$$a_E = D_e + \max[0, -F_e]$$

$$a_W = D_w + \max[F_w, 0]$$

4.4- Solution exacte de l’équation convection -diffusion

Par simplification considérons l’équation de transport d'une variable par convection -diffusion sous sa forme 1D, dans le cas stationnaire et sans terme source :

$$\frac{d(\rho u\phi)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right)$$

Les conditions limites : à x = 0 on a $\Phi = \Phi_0$

à x = L on a $\Phi = \Phi_L$

$$\frac{d(F\phi)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right)$$

D’après l’équation on a F = constante et Γ́ = constante

$$\frac{F}{\Gamma}\frac{d\phi}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$$

On pose

$$\frac{d\phi}{dx}=H \quad \text{d'où} \quad \frac{F}{\Gamma}H=\frac{dH}{dx} \quad \text{d' ou} \quad \frac{F}{\Gamma}dx=\frac{dH}{H}$$

On intègre cette équation :

$$\int\frac{F}{\Gamma}dx=\int\frac{dH}{H} \quad \text{d'où} \quad \ln H=\frac{F}{\Gamma}x+C \quad \text{d'où} \quad H=Ae^{\frac{F}{\Gamma}x} \quad \text{d'où} \quad \frac{d\phi}{dx}=Ae^{\frac{F}{\Gamma}x}$$

$$\phi=Be^{\frac{F}{\Gamma}x}+C$$

D’où

on utilise les conditions limites

à x = 0 on a $\Phi = \Phi_0$ $\Phi_0 = B+C$ à x = L on a $\Phi = \Phi_L$ $\phi_L=Be^{\frac{F}{\Gamma}L}+C$

Soit le système d’équation $\begin{cases}\phi_L=Be^{\frac{F}{\Gamma}L}+C\\ \phi_0=B+C\end{cases}$ on déduit que $\phi_L-\phi_0=B(e^{\frac{F}{\Gamma}L}+1)$

$$P_e=\frac{FL}{\Gamma} \qquad B=\frac{\phi_L-\phi_0}{e^{P_e}-1} \qquad C=\phi_0-\frac{\phi_L-\phi_0}{e^{P_e}-1}$$

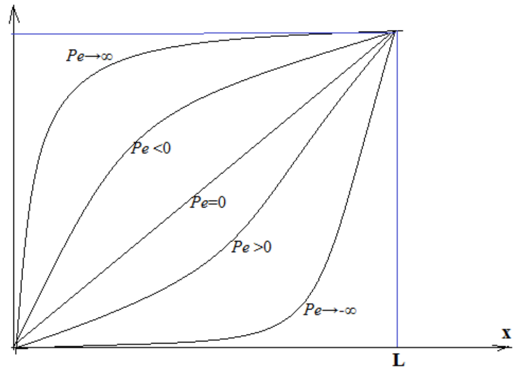
d’où

$$\phi=\frac{\phi_L-\phi_0}{e^{P_e}-1}e^{P_e\frac{x}{L}}+\phi_0-\frac{\phi_L-\phi_0}{e^{P_e}-1}$$

D’où

$$\frac{\phi-\phi_0}{\phi_L-\phi_0}=\frac{e^{P_e\frac{x}{L}}-1}{e^{P_e}-1}$$

Le tracé de cette fonction donne



Remarque :

Par exemple P_e= o donc il n'y a pas d'écoulement (il ne reste le terme de la diffusion)
Inconvénients de la solution exacte est que :

- Si le nombre de Peclet est très faible, la solution est moins précise
- Si le nombre de Peclet est très grand devant 1, la solution surestime le terme de diffusion

4.5- Schéma hybride (de Spalding1972)

Il repose sur une combinaison de deux schémas,

- la différence centre, qui est précis au second ordre, est utilise pour les petits nombres de Peclet (Pe<2)
- le schéma Upwind, qui est précis au premier ordre, est utilise pour les grands nombres de Peclet (Pe ≥2).

Comme précédemment, nous développons la discrétisation de la convection unidimensionnelle dans l'equation 4-2 de diffusion sans terme source il donne.

$$a_W = \max\left[F_w\left(D_w + \frac{F_w}{2},0\right)\right]$$

$$a_E = \max\left[-F_e\left(D_e - \frac{F_e}{2},0\right)\right]$$

4.6- Schéma la loi de puissance

Le schéma de la loi de puissance de Patankar (1980) est une approximation plus précise de la solution exacte unidimensionnelle et donne de meilleurs résultats que le schéma hybride. Dans ce schéma, la diffusion est fixée a zéro lorsque Pe supérieur a 10.
Si 0 <Pe<10, le flux est évalué a l'aide d'une expression polynomiale. Par exemple, le flux net par unité de surface au volume de contrôle ouest est évalué a l'aide des propriétés du schéma de la loi de puissance sont similaires a celles du schéma hybride.
Le schéma de la loi de puissance est plus précis pour les problèmes monodimensionnels puisqu'il représente la solution exacte.

$$a_E = D_e \max\left[0,\left(1-0.1\left|P_e\right|\right)^5\right] + \max\left[F_e,0\right]$$

$$a_w = D_w \max\left[0,\left(1-0.1\left|P_e\right|\right)^5\right] + \max\left[F_w,0\right]$$