الفصل الثاني: مدخل إلى حساب الاحتمالات

1. الحوادث واحتمالاتها.
2. الاحتمالات الشرطية واستقلالية الحوادث.
3. نظرية الاحتمال الكلي
4. قانون بايز

1. الحوادث واحتمالاتها:

لتعريف الاحتمال لابد أن نتطرق لبعض التعاريف والمفاهيم الأساسية في نظرية الاحتمالات:

التجربة العشوائية :هي كل تجربة تكون نتائجها غير معروفة مسبقا، وإذا كررنا نفس التجربة وضمن نفس الشروط لا نحصل بالضرورة على نفس النتائج.

مثال: رمي قطعة نقدية، رمي حجر نرد...إلخ.

الحادثة أو الحدث (Evènement): هو الواقعة التي يمكن أن تتحقق أو لا تتحقق أو هو كل نتيجة ممكنة لتجربة عشوائية.

المجموعة الأساسية: هي مجموعة النتائج أو الحالات الممكنة لتجربة ما، ونرمز لها بالرمز Ω أو S كما تعرض على شكل مجموعة رياضية: $\Omega = \{............\}$ وعدد عناصر Ω يرمز لها $|\Omega|$ أو $\text{card}(\Omega)$.

1.1. احتمال الحادث:

يعتمد حساب احتمال الحادثة على معرفة جميع الحالات الممكنة للتجربة العشوائية (حالات تحقق الحادثة أو عدم تحققها)، ثم فرز الحالات التي يمكن أن تتحقق فيها هذه الحادثة وتسمى بـ "**الحالات الملائمة**"، وعليه يحسب الاحتمال كما يلي:

$$\text{احتمال تحقق الحادثة} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

يرمز للاحتمال بالرمز **P** وهو يحقق: $0 \le P \le 1$

مثال 01:

نقوم برمي زهرة نرد مرة واحدة، إن النتائج الممكنة أو مجموعة الحالات الممكنة هي: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

نعرف الحادثة A كما يلي:

A: ظهور رقم زوجي، ومنه $A = \{2, 4, 6\}$

- أحسب احتمال تحقق الحادثة A.

الحل:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{\text{عددعناصر } A}{\text{عددعناصر } \Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{3}{6} = 0.5$$

ومنه احتمال ظهور رقم زوجي عند رمي زهرة نرد مرة واحدة هو 50 %.

مثال 02:

صندوق به 06 كرات سوداء و04 حمراء، نقوم بسحب كرة واحدة ماهو احتمال أن تكون هذه الكرة حمراء (R)؟

الحل:

$$P(R) = \frac{C_4^1}{C_{10}^1} = \frac{4}{10} = 0.4$$

ومنه احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق حمراء هو 40 %.

مثال 03:

صندوق به 05 كرات حمراء و02 كرات صفراء نسحب كرتين على التوالي بدون ارجاع.

- احسب احتمال ان تكون الكرة الثانية حمراء.

الحل:

نلاحظ في هذه التجربة أننا نهتم باختيار جزء من الكل (2 من بين 7) ، السحب يتم دفعة واحدة أي أن الترتيب غير مهم والتكرار غير ممكن وبالتالي نستخرج عدد الحالات الممكنة بواسطة التوفيقة C_n^P :

$$C_7^2 = \frac{7!}{(7-2)!2!} = 21$$

نسمي A حادثة الحصول على الكرة الثانية حمراء.

الحالات الملائمة هي أن تكون الكرتين المسحوبتين حمراء (الأولى حمراء والثانية حمراء) أو الكرة الأولى خضراء والثانية حمراء.

لدينا: $P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$

$$P(A) = \frac{C_5^2 + (C_2^1 \times C_5^1)}{C_7^2} = \frac{20}{21}$$

2.1. أنواع الحدث:

للحدث عدة أنواع أبرزها:

- **الحدث الأكيد:** هو الحادث الذي يكون تحققه مؤكد ويتضمن جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية وبذلك يكون احتماله مساويا للواحد.

مثال: في تجربة رمي قطعة نرد مرة واحدة ماهو احتمال الحصول على رقم أقل من 10؟

لدينا المجموعة الأساسية: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

الحادثة A: الحصول على رقم أقل من 10 ومنه: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{6} = 1$$

- **الحدث المستحيل:** نقول عن حدث أنه مستحيل إذا كان غير قابل للتحقق،

مثال: في تجربة رمي قطعة نرد مرة واحدة ماهو احتمال الحصول على رقم أكبر من6 ؟

الحادثة A: الحصول على رقم أكبر من 6 ومنه: $A = \phi$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{0}{6} = 0$$

- **الحدث المتمم (النقيض أو العكسي):** يكون الحدث $\bar{A}$ متمما للحدث A إذا كانا حدثان غير متلائمين واتحادهما يعطي المجموعة الكلية (Ω) ونكتب:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

ومنه: $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1$

ملاحظة: نسمي A الحدث الأساسي و $\bar{A}$ الحدث المتمم.

مثال:

إذا كان احتمال نجاح محمد في مقياس الإحصاء يساوي 0.6 فأوجد احتمال رسوبه.

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

A: نجاح محمد في مقياس الإحصاء.

$\bar{A}$: عدم نجاح (رسوب) محمد في مقياس الإحصاء.

لدينا: P(A)=0.6

ومنه: $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$

احتمال رسوب محمد في مقياس الإحصاء يساوي 40 %.

- **الأحداث المتنافية (غير متلائمة):** هي الأحداث التي لا يمكن وقوعهما معا حيث وقوع أحدها يمنع وقوع الآخر، مثلا عند رمي زهرة نرد بطريقة عشوائية مرة واحدة، نعرف الأحداث التالية:

A : ظهور رقم زوجي، B : ظهور رقم فردي.

نقول عن الحدثين A و B أنهما متنافيان لأن ظهور رقم زوجي يمنع تحقق الحدث الآخر (ظهور الرقم الفردي) ونكتب: $A \cap B = \phi$.

- **الحوادث غير المتنافية** :هي الحوادث التي يمكن وقوعها في آن واحد حيث وقوع أحدها لا يمنع وقوع الآخر، مثلا عندما نرمي عشوائيا زهرة نرد مرة واحدة، نعرف الأحداث التالية:

A: النتيجة عدد فردي، B: النتيجة عدد أولي.

نقول عن الحدثين A و B أنهما غير متنافيان لأن ظهور رقم فردي لا يمنع تحقق الحدث الآخر (ظهور العدد الأولي)، فالرقم 3 مثلا رقم فردي وأولي.

- **الحوادث غير المستقلة:** نقول أن A و B حدثان غير مستقلان إذا كان تحقق أحدهما مرتبط بأي شكل من الأشكال بتحقق الآخر، مثلا السحب من مجتمع محدود وصغير مع عدم الإعادة، وبالتالي فالسحبة الموالية تتأثر بالسحبة السابقة.
- **الحوادث المستقلة:** نقول أن A و B حدثان مستقلان إذا كان تحقق أحدهما غير مرتبط بأي شكل من الأشكال بتحقق الآخر، مثلا نجاح طالب لا يؤثر في نجاح باقي الطلبة.

3.1. قواعد حساب الاحتمالات:

أ. قاعدة الجمع:

- **قاعدة الجمع لاحتمالات الأحداث المتنافية:**

$P(A$ أو $B)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

ملاحظة: A و B متنافيان يعني رياضيا: $A\cap B=\emptyset$ ومنه: $P(A\cap B)=0$

- **قاعدة الجمع لاحتمالات الأحداث غير المتنافية:**

$P(A$ أو $B)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

ملاحظة: A و B غير متنافيان يعني رياضيا: $A\cap B\neq\emptyset$

ب. قاعدة الضرب :

- **قاعدة الضرب لاحتمالات الأحداث المستقلة:** $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$
- **قاعدة الضرب لاحتمالات الأحداث غير المستقلة:** $P(A\cap B)=P(A)\times P(B/A)$

العبارة $P(B/A)$ تقرأ كالتالي: احتمال تحقق الحدث العشوائي B شرط A ، بمعنى احتمال تحقق الحدث العشوائي B شرط أن يكون تحقق قبله A.

4.1. نتائج:

- احتمال الحادثة المستحيلة يساوي الصفر، أي أن: $P(\phi) = 0$
- إذا كانت الحوادث A_1، A_2، ....، A_n حوادث متنافية (منفصلة) تبادليا فإن:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

لأي حادثة A يكون: $P(\bar{A})=1-P(A)$

لأي حادثتين A و B يكون:

$$P(A-B)=P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)$$
$$\Leftrightarrow P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\bar{B})$$
$$P(B-A)=P(\bar{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$$
$$\Leftrightarrow P(B)=P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)$$
$$(A\cup B)=P(A)+P(\bar{A}\cap B)$$
$$=P(B)+P(A\cap\bar{B})$$
$$=P(A\cap\bar{B})+P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)$$
$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=1-P\overline{(\bar{A}\cup\bar{B})}=1-P(A\cup B)$$

مثال:

إذا كانت A و B حادثتين معرفتين على نفس فضاء العينة بحيث:

$P(A) = 0.2,\ P(B) = 0.4,\ P(A\cup B) = 0.5$

أوجد الاحتمالات التالية:

$$P(A\cap B);P(A\cap\bar{B});P(\bar{A}\cap B);P(\bar{A}\cap\bar{B})$$

الحل:

$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) = 0.2 + 0.4 - 0.5 = 0.1$$

$$P(A\cap\bar{B}) = P(A) - P(A\cap B) = 0.2 - 0.1 = 0.1$$

$$P(\bar{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B) = 0.4 - 0.1 = 0.3$$

$$P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - 0.5 = 0.5$$

2. الاحتمالات الشرطية واستقلالية الحوادث:

1.2. تعريف الاحتمال الشرطي:

ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث: $P(B)\neq 0$، يسمى احتمال الحدث A علما أن الحدث B محقق بـ "**الاحتمال الشرطي**" ويرمز له $P\left(A/B\right)$ حيث:

$$P\left(A/B\right) = \frac{card(A\cap B)}{card(B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

ملاحظة: $P\left(A/B\right) \neq P\left(B/A\right)$

نتائج:

$$P\left(\bar{A}/B\right) = 1 - P\left(A/B\right)$$

إذا كان $P(B)\neq 0$ و $P(A)\neq 0$ فإن:

$$P(A\cap B) = P\left(A/B\right)\times P(B)$$

$$= P\left(B/A\right)\times P(A)$$

مثال 01:

يتكون فريق من 21 شخص، 8 تونسيين (5نساء و3 رجال) والبقية جزائريين علما أن عدد الرجال ضعف عدد النساء في هذا الفريق.

ماهو احتمال ان يكون الشخص المختار عشوائيا:

- امرأة علما أنها جزائرية.
- تونسي علما أنه امرأة.

الحل:

لدينا عدد الجزائريين هو: 21−8=13

ومع العلم أن عدد الرجال ضعف عدد النساء في هذا الفريق نكتب:

$5+X=\alpha$

$3+Y=2\alpha$ حيث: $X+Y=13$ بجمع المعادلتين السابقتين طرف لطرف نجد:

$8+X+Y=3\alpha$

$8+13=3\alpha$ ومنه $\alpha=7$ بالتعويض في المعادلتين السابقتين نجد:

$X=2$ و $Y=11$

والجدول التالي يلخص كل المعطيات:

الجنسية \ الجنس	رجال	نساء	المجموع
جزائرية (Al)	**11**	**2**	**13**
تونسية (Tn)	**3**	**5**	**8**
المجموع	**14**	**7**	**21**

حساب احتمال ان يكون الشخص المختار عشوائيا امرأة علما أنها جزائرية:

$$P\left(F/_{Al}\right)=\frac{P(F\cap Al)}{P(Al)}$$

لدينا:

$$P(F\cap Al)=\frac{2}{21};P(Al)=\frac{13}{21}$$ ومنه: $$P\left(F/_{Al}\right)=\frac{2/21}{13/21}=\frac{2}{13}$$

حساب احتمال ان يكون الشخص المختار عشوائيا تونسي علما أنه امرأة:

$$P\left(Tn/_{F}\right)=\frac{P(Tn\cap F)}{P(F)}$$

لدينا:

$$P(Tn\cap F)=\frac{5}{21};P(F)=\frac{7}{21}$$ ومنه: $$P\left(Tn/_{F}\right)=\frac{5/21}{7/21}=\frac{5}{7}$$

مثال 02:

نرمي حجر نرد ونعتبر الحادثتين:

A : الحصول على رقم فردي .

B : الحصول على مضاعف للعدد 3.

- أحسب احتمال الحصول على رقم فردي علما أنه من مضاعفات العدد 3.

الحل:

حساب احتمال الحصول على رقم فردي علما أنه من مضاعفات العدد 3 أي:

$$P\left(A/_{B}\right)=\frac{card(A\cap B)}{card(B)}$$

لدينا: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ $A=\{1,3,5\}$ $B=\{3,6\}$ $A\cap B=\{3\}$

ومنه:

$$P\left({}^{A}/_{B}\right)=\frac{1}{2}$$

مثال 03:

نفترض أن احتمال وقوع الحدث B شرط وقوع الحدث A يساوي $\frac{1}{2}$ ، واحتمال وقوع الحدث A يساوي $\frac{3}{7}$.

- أحسب احتمال وقوع كلا الحدثين A و B ؟

الحل:

المعطيات: $P\left(B/A\right)=\frac{1}{2};P\left(A\right)=\frac{3}{7}$

- حساب احتمال وقوع كلا الحدثين A و B $P(A\cap B)$:

$$P\left(B/A\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(A\right)}\Rightarrow P\left(A\cap B\right)=P\left(B/A\right)\times P\left(A\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{14}$$

2.2. الأحداث المستقلة:

تعريف:

لتكنA و B حادثتين معرفتين على نفس فضاء العينة Ω، يقال بأن الحادثتين A و B مستقلتان إذا تحقق أحد الشروط المتكافئة التالية:

$$P\left(A/B\right)=P\left(A\right)$$

$$P\left(B/A\right)=P\left(B\right)$$

$$P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\times P\left(B\right)$$

نتيجة:

العبارات التالية متكافئة:

الحادثتانA و B مستقلتان.

الحادثتانA و $\bar{B}$ مستقلتان.

الحادثتان$\bar{A}$ و B مستقلتان .

الحادثتان $\bar{A}$ و $\bar{B}$ مستقلتان.

3. نظرية الاحتمال الكلي:

Ω مجموعة الإمكانيات المتعلقة بتجربة عشوائية.

P احتمال معرف على Ω.

تعريف : نقول عن الحوادث A_1، A_2،................، A_n أنها تجزئة للمجموعة Ω إذا وفقط إذا كانت:

1. كل من هذه الحوادث غير مستحيلة.
2. كل حادثتين من هذه الحوادث غير متلائمتين.
3. اتحاد هذه الحوادث يساوي Ω.

إذا كانت A حادثة من Ω فإن:

$$P(A) = P\left(A/_{A_1}\right).P(A_1) + P\left(A/_{A_2}\right).P(A_2) + \cdots + P\left(A/_{A_n}\right).P(A_n)$$

ويسمى بقانون الاحتمال الكلي.

مثال:

مصنع به ثلاث آلات A، B، C إنتاجها 50%، 30% و20% على التوالي، نسبة الانتاج التالف لكل آلة 5%، 4% و3% على التوالي.

- إذا سحبنا وحدة منتجة عشوائيا ماهو احتمال أن تكون تالفة؟
- أحسب احتمال أن تكون الوحدة من انتاج الالة A علما أنها تالفة.

الحل:

نرمز للإنتاج التالف بالرمز D

لدينا:

$$P\left(D/_A\right) = 5\% = 0.05$$

$$P\left(D/_B\right) = 4\% = 0.04$$

$$P\left(D/_C\right) = 3\% = 0.03$$

حساب P(D):

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) \\ &= P\left(D/_A\right).P(A) + P\left(D/_B\right).P(B) + P\left(D/_C\right).P(C) \\ &= (0.5 \times 0.05) + (0.3 \times 0.04) + (0.2 \times 0.03) \\ &= 0.043 \end{aligned}$$

- حساب احتمال أن تكون الوحدة من انتاج الالة A علما أنها تالفة:

$$P\left(A/_D\right) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A).P\left(D/_A\right)}{P(D)}$$

$$= \frac{0.5 \times 0.05}{0.043} = 0.58$$

4. قانون بايز:

تحت فرضيات نظرية الاحتمال الكلي، يكتب قانون بايز وفق الصيغة التالية:

$$P\left(A_i/_{A}\right)=\frac{P(A_i).P\left(A/_{A_i}\right)}{P(A_1).P\left(A/_{A_1}\right)+P(A_2).P\left(A/_{A_2}\right)+\cdots+P(A_k).P\left(A/_{A_k}\right)}$$

$$=\frac{P(A_i).P\left(A/_{A_i}\right)}{\sum_{i=1}^{k}P(A_i).P\left(A/_{A_i}\right)}$$

مثال:

إذا كان لدينا ثالث صناديق الصندوق الأول فيه (05) كريات بيضاء و(03) كريات سوداء، والصندوق الثاني به (04) كريات بيضاء و (04) كريات سوداء والصندوق الثالث فيه كرة بيضاء و(04) كريات سوداء.

نختار صندوق عشوائيا ونسحب منه كرية بيضاء.

المطلوب:

- ماهو احتمال أن تكون هذه الكرية من الصندوق الثاني مع العلم أنها بيضاء؟
- ماهو احتمال أن تكون هذه الكرية سوداء؟

الحل:

نسمي الصناديق الثالثة بـ A_1، A_2، A_3 ونسمي سحب الكرة البيضاء بـ (B) ونسمي سحب الكرة السوداء بـ (N).

- حساب احتمال أن تكون هذه الكرية من الصندوق الثاني مع العلم أهنا بيضاء:

$$P\left(A_2/_{B}\right)=\frac{P(A_2).P\left(B/_{A_2}\right)}{P(A_1).P\left(B/_{A_1}\right)+P(A_2).P\left(B/_{A_2}\right)+P(A_3).P\left(B/_{A_3}\right)}$$

لدينا: $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=1/3$

إذن:

$$P\left({}^{A_2}/_{B}\right) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{4}{8}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{5}{8}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{4}{8}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{20}{53}$$

- حساب احتمال أن تكون هذه الكرية سوداء:

$$P(N) = P(A_1).P\left({}^{N}/_{A_1}\right) + P(A_2).P\left({}^{N}/_{A_2}\right) + P(A_3).P\left({}^{N}/_{A_3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{4}{8}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{67}{120}$$