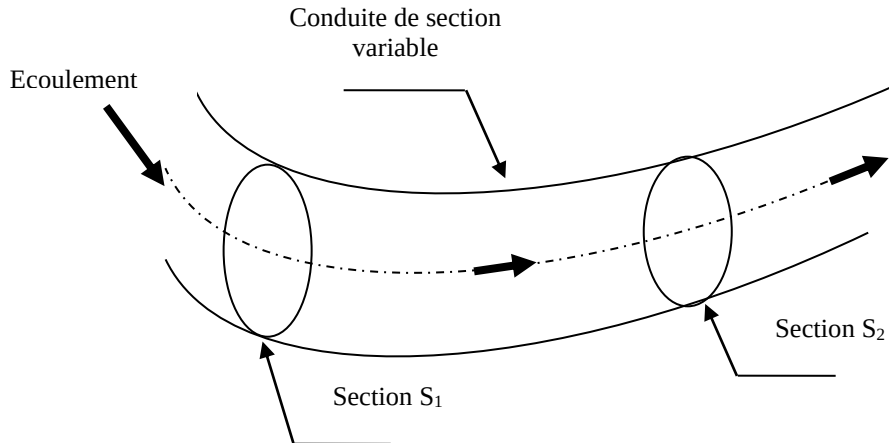


Chapitre 2 : Ecoulement isentropique 1D en conduit à section variable

2.1 Généralités :

L'influence d'une variation de section, sur les caractéristiques physiques d'un fluide compressible en écoulement, sera traitée à travers ce chapitre.

Soit un écoulement isentropique (adiabatique, réversible et sans frottements visqueux), unidirectionnel, d'un gaz parfait, à travers une conduite de section variable.



Soit les hypothèses suivantes :

- Régime permanent établi,
- Ecoulement stationnaire,
- Effet des forces de volume (pesanteur) négligeables,
- Pas de machine et pas d'obstacles donc pas de travail technique.

2.2 Equations de base :

Pour ce type d'écoulement, les équations de mouvements de la dynamique des gaz, pour une unité de masse, s'écrivent :

- **Equation de continuité :**

$$\dot{m} = \rho \cdot S \cdot V = \text{cste} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} + \frac{dV}{V} = 0$$

- **Equation de quantité de mouvement :**

$$d\left(\frac{V^2}{2}\right) = -\frac{dp}{\rho} + dW$$

dW : Travail des forces extérieures réduit aux forces de pesanteur, si on doit tenir compte du frottement, le travail correspondant figure dans dW qui est nul ($dW=0$).

$$d\left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

- **Equation de l'énergie :**

$$dH + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = W_T + Q$$

$Q = 0$: Ecoulement adiabatique, $W_T=0$: pas de machine ni obstacle.

$$dH + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0$$

- **Equation de l'état :** $\frac{p}{\rho} = rT$

Pour une évolution isentropique, l'équation d'état est : $\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{const}$

En combinant cette équation avec l'équation d'état de gaz parfait et puis en l'appliquant entre deux états 1 et 2 on obtient pour n'importe quel gaz :

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma$$

2.3 Lois générales de l'écoulement isentropique: état générateur et état critique.

Un gaz ou un fluide en général est dit en écoulement dans une conduite, si la particule fluide est en mouvement (munie d'une vitesse constante ou variable).

Formule de ZEUNER

l'équation de l'énergie sous forme différentielle pour un écoulement isentropique s'écrit :

$$dH + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0, \text{ L'intégration de cette équation donne : } H + \frac{v^2}{2} = \text{cst}$$

avec H : Enthalpie statique et $H_t = H + \frac{v^2}{2}$: Enthalpie totale , on a:

$$H_t = H + \frac{v^2}{2} = \text{cst}$$

C'est la formule de Zeuner qui est valable pour une transformation quelconque, s'applique pour les gaz parfaits et réels (visqueux), pourvu que l'écoulement soit adiabatique.

Pour un gaz parfait on a : $H = C_p \cdot T$, L'équation de Zeuner donne : $C_p \cdot T + \frac{v^2}{2} = C_p \cdot T_t$

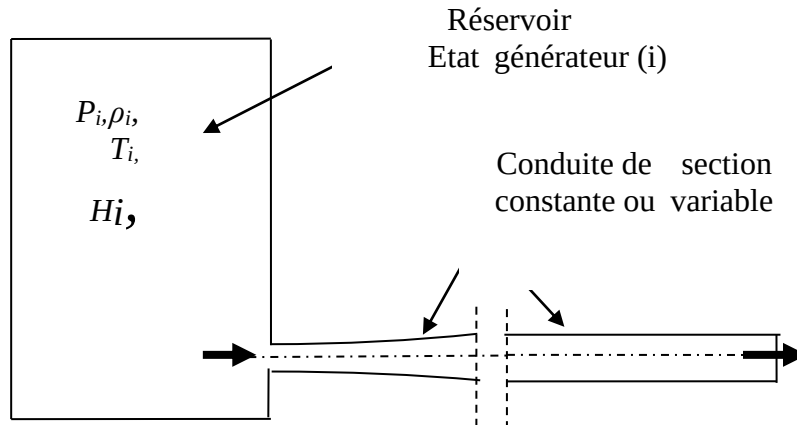
avec T : Température statique et $T_t = T + \frac{v^2}{2 \cdot C_p}$: Température totale

2.3.1 Etat générateur

On définit un état générateur comme étant un état réel ou fictif pour lequel le fluide étant en repos (vitesse est nulle). Il est caractérisé par l'indice (i) (pi, ρi, Ti, ect..).

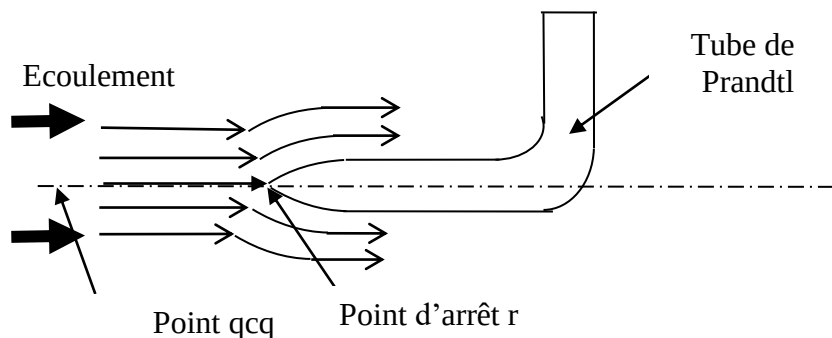
Chapitre 3 : Ecoulement isentropique 1D en conduit à section variable

On peut avoir une représentation physique approchée de cet état en supposant un réservoir de grandes dimensions, dans lequel la vitesse est pratiquement nulle, et à partir duquel s'écoule d'un gaz à travers une conduite de section variable ou constante.



Ecoulement en un point d'arrêt (stagnation de l'écoulement) :

Soit un tube de Prandtl (dispositif pour la mesure de pression) placé dans un écoulement gazeux, le point d'arrêt est le point où s'arrête le fluide. En affectant de l'indice (r) les caractéristiques correspondantes.



L'application de la formule de Zeuner entre le point d'arrêt et un point

quelconque de l'écoulement donne :

$$\frac{v^2}{2} + H = H_r$$

$$\frac{v^2}{2} + C_p \cdot T = C_p \cdot T_r$$

$$T_r = T + \frac{v^2}{2 \cdot C_p}$$

Pour un gaz parfait, on a :

du gaz en écoulement

T_r : Température d'arrêt et T : Température

$\frac{v^2}{2 \cdot C_p}$: Température due à la vitesse.

Remarques :

Chapitre 3 : Ecoulement isentropique 1D en conduit à section variable

Entre un état générateur et un point d'arrêt on a toujours : $T_i = T_r$, mais p_i n'est pas toujours égal à p_r .

Si l'écoulement est subsonique $p_i = p_r$ et $\rho_i = \rho_r$, c'est un phénomène réversible (écoulement isentropique).

Si l'écoulement est supersonique $p_r < p_i$, le phénomène est irréversible (ondes de choc).

Relation de Barré de Saint Venant :

En supposant l'écoulement précédent (formule de Zeuner) et lorsque l'on est en présence d'un gaz parfait avec :

$$\frac{p}{\rho} = rT;$$

$$\frac{C_p}{C_v} = \gamma;$$

$$C_p - C_v = r$$

$$C_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1};$$

$$H = C_p T$$

$$\text{L'équation de Zeuner devient : } \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \text{cst}$$

L'application de cette équation entre un état générateur et un point quelconque du tronçon de la conduite par lequel s'écoule le gaz donne :

$$v = \sqrt{2 \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_i}{\rho_i} \left[1 - \left(\frac{p}{p_i} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right]}$$

C'est la relation de Barré de Saint Venant qui nous permet de calculer la vitesse dans une section de conduit où la pression est P .

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_i}{\rho_i} = C_p T_i$$

$$\text{Avec : } \left(\frac{p}{p_i} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho}{\rho_i} \right)^{\gamma - 1} = \frac{T}{T_i}$$

Cette équation, en fonction des températures s'écrit :

$$v = \sqrt{2 C_p T \left(1 - \frac{T}{T_i} \right)}$$

Remarque :

Chapitre 3 : Écoulement isentropique 1D en conduit à section variable

Cette vitesse est appelée aussi vitesse de décharge atteinte en détendant un écoulement isentropique à partir d'un état générateur.

2.3.2 Etat critique :

Pour cela effectuons une détente d'un écoulement isentropique à travers une conduite de section variable depuis un état générateur et déterminons l'état critique (conditions critiques).

Limite supérieure de la vitesse d'écoulement :

Cette limite est obtenue en appliquant les relations précédentes entre l'état générateur et le vide ($p=0$, $T=0$)

$$\Rightarrow v = \sqrt{2 \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_i}{\rho_i}} = V_{\max}$$

En introduisant la célérité de l'onde a_i à l'état générateur :

$$a_i = \sqrt{\gamma \cdot r \cdot T_i} \quad \text{on a:} \quad v_{\max} = a_i \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}$$

Cette valeur est la limite de la vitesse qui ne dépend que des conditions de l'état générateur, elle ne peut être atteinte que lorsque on a une détente isentropique.

Écoulement à travers une conduite de section variable :

Le débit massique de l'écoulement dans une tranche quelconque de la canalisation est donnée par :

$$q_m = \rho \cdot S \cdot v$$

$$\text{On aura : } \Rightarrow q_m = \rho \cdot S \cdot \sqrt{2 \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_i}{\rho_i} \left(1 - \left(\frac{p}{p_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)}$$

Avec la loi de transformation isentropique et en posant:

$$Y = \left(\frac{p}{p_i} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

$$q_m = \rho_i \cdot S \cdot v_{\max} \cdot Y$$

Chapitre 3 : Ecoulement isentropique 1D en conduit à section variable

Si on maintient P_i et ρ_i constants

$$q_m = C^{te} \cdot S \cdot Y = cte \Rightarrow \text{si } Y \downarrow S \uparrow \text{ et inversement si } Y \uparrow S \downarrow.$$

Y atteint un maximum dans la section d'aire est minimum, On l'appelle section critique.

Pour trouver les conditions correspondant à l'état critique de l'écoulement on étudie les variations de la fonction :

$$Y = f\left(\frac{p}{p_i}\right)$$

Y atteint le maximum si la dérivée s'annule.

$$f'\left(\frac{p}{p_i}\right) = 0 \Rightarrow \text{pour } \frac{p}{p_i} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}$$

Ce maximum ne peut être atteint que dans la section d'aire minimum appelée col de la canalisation.

$$\frac{p}{p_i} = \frac{p_c}{p_i}$$

Dans ce cas on a

La vitesse au col est $V_a = a_c \implies M=1$ (toujours)

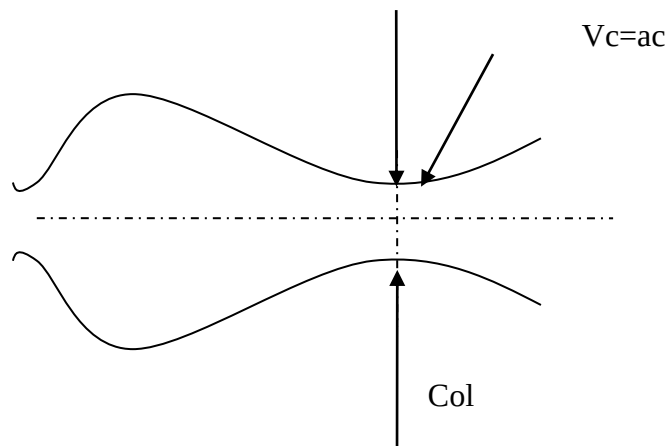
$$V_c = a_c = \sqrt{a_i^2 \frac{2}{\gamma-1} \left(1 - \frac{2}{\gamma+1}\right)} = a_i \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$$

Le débit massique est alors :

$$q_{mcrit} = \rho_c \cdot S_c \cdot V_c = S_c \cdot a_i \cdot \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \cdot \rho_i \cdot \left(\frac{p_c}{p_i}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = S_c \cdot a_i \cdot \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \cdot \rho_i \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

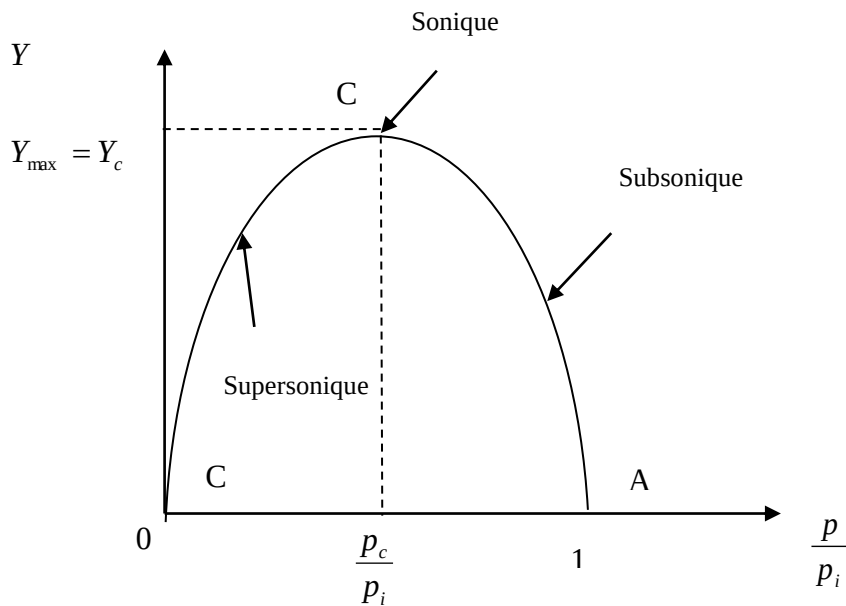
$$q_{mcrit} = S_c \cdot \rho_i \cdot a_i \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

C'est le maximum possible de débit de la canalisation. Pour un état générateur et une canalisation donnée, le débit dépend de la détente imposée donc de la pression aval.



Si pour chaque valeur de la pression aval on détermine le débit au col. Les conditions de l'écoulement à vitesse sonique se trouvent réalisés lorsque le débit est maximum lorsque Y est maximum, donc au col. Ces conditions correspondent à l'état critique de l'écoulement.

Les variations du débit massique en fonction de la pression aval sont données par la courbe ci-dessous.



Caractéristiques à l'état critique :

L'état critique correspond aux conditions pour lesquels $V_c = a_c$, il joue un rôle très important dans les problèmes d'écoulements. Pour un écoulement isentropique on a :

$$\frac{p_c}{p_i} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}};$$

$$\frac{\rho_c}{\rho_i} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}};$$

$$\frac{T_c}{T_i} = \frac{2}{\gamma+1};$$

$$\frac{a_c}{a_i} = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}};$$

Remarque : Les valeurs numériques des caractéristiques à l'état critique sont toujours inférieures à ceux de l'état générateur.

3.4 Ecoulement 1D dans une conduite de section variable et théorème d'hugoniot.

nous allons établir les expressions donnant les variations des caractéristiques physiques en fonction de la variation de section $\frac{dS}{S}$.

La relation d'hugoniot combinée avec les autres équations donne la variation de la vitesse :

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{1-M^2} \cdot \frac{dS}{S}$$

Les variations des autres caractéristiques physiques sont données par :

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{M^2}{M^2-1} \cdot \frac{dS}{S}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{M^2}{1-M^2} \cdot \frac{dS}{S}$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{(\gamma-1)M^2}{1-M^2} \cdot \frac{dS}{S}$$

$$\frac{da}{a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\gamma-1)M^2}{1-M^2} \cdot \frac{dS}{S}$$

$$\frac{dM}{M} = -\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2}{1-M^2} \cdot \frac{dS}{S}$$

Rapports des caractéristiques physiques.

Entre deux points (1) et (2) de l'écoulement, on obtient :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{\gamma-1}{2}M_1^2 + 1}{\frac{\gamma-1}{2}M_2^2 + 1}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\frac{\gamma-1}{2}M_1^2 + 1}{\frac{\gamma-1}{2}M_2^2 + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{\frac{\gamma-1}{2}M_1^2 + 1}{\frac{\gamma-1}{2}M_2^2 + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \left(\frac{\frac{\gamma-1}{2}M_1^2 + 1}{\frac{\gamma-1}{2}M_2^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{M_2}{M_1} \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{M_2}{M_1} \cdot \left(\frac{\frac{\gamma-1}{2}M_1^2 + 1}{\frac{\gamma-1}{2}M_2^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{M_2}{M_1} \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \frac{M_2}{M_1} \cdot \left(\frac{\frac{\gamma-1}{2}M_1^2 + 1}{\frac{\gamma-1}{2}M_2^2 + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Au col d'une tuyère on trouve les conditions sonique à $M=1$, entre un point quelconque et le col les rapports des caractéristiques, soit les conditions critiques, sont données par :

Pour $M_1=M_c=1$ et $M_2=M$, on a :

$$\frac{T}{T_c} = \frac{\frac{\gamma-1}{2} + 1}{\frac{\gamma-1}{2}M^2 + 1}$$

$$\frac{p}{p_c} = \left(\frac{\frac{\gamma-1}{2} + 1}{\frac{\gamma-1}{2}M^2 + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \left(\frac{\frac{\gamma+1}{2}}{\frac{\gamma-1}{2}M^2 + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Pour $M=0$ (état générateur), on a :

$$\frac{T_i}{T_c} = \frac{\gamma+1}{2}$$

$$\frac{p_i}{p_c} = \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\rho_i}{\rho_c} = \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Table de calcul.

Il existe des tables et des courbes qui donne en fonction de la valeur du nombre de mach (M) les rapports des caractéristiques $\frac{p}{p_c}, \frac{T}{T_c}, \frac{\rho}{\rho_c}$.

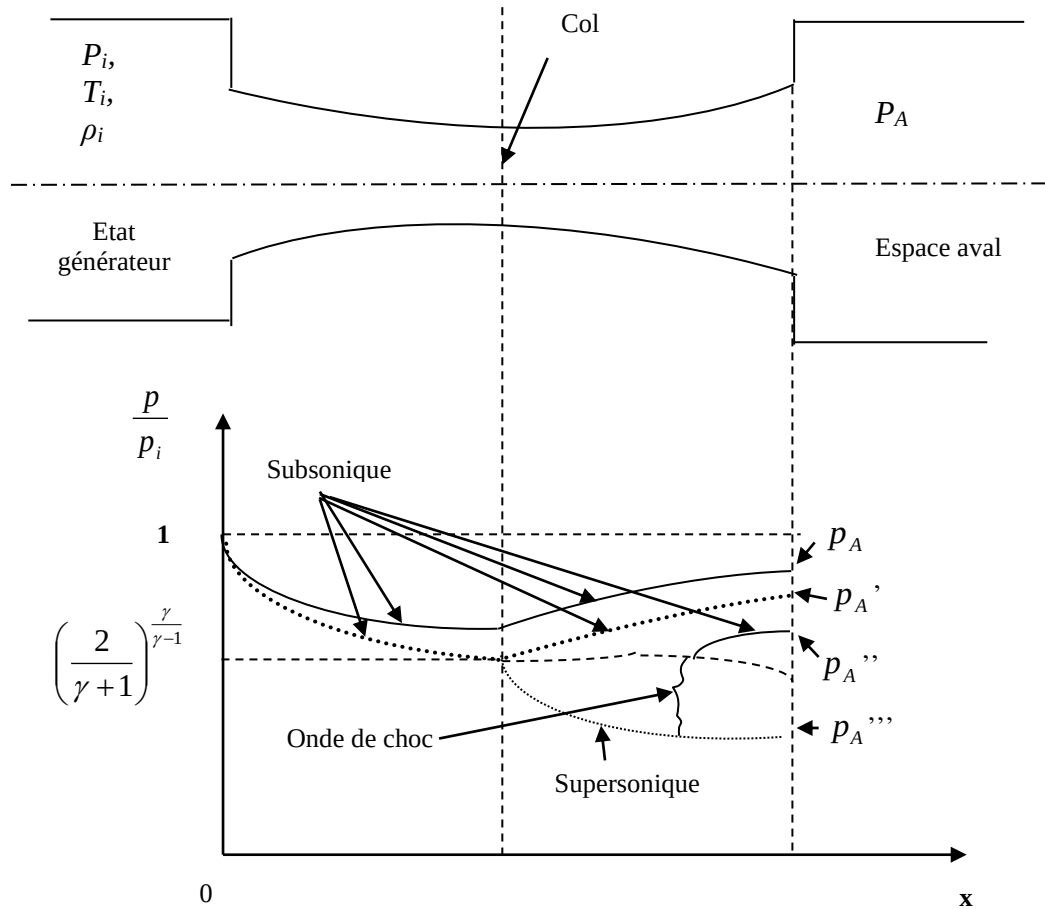
Les valeurs de rapport $\frac{T}{T_i}, \frac{\rho}{\rho_i}$ et $\frac{p}{p_i}$ sont tabulées en fonction du nombre de mach et du régime de l'écoulement pour du gaz considéré donc en fonction de la valeur du rapport des chaleurs massiques γ . La plupart des problèmes pratiques peuvent êtres résolus à l'aide de ces tables de calculs.

Le col sonique n'existe pas obligatoirement dans une tuyère réelle. Cependant, on peut toujours trouver les rapports de sections en se servant de la formule ou du tableau, en supposant un col sonique fictif en un point de l'écoulement.

3.5 Etude d'un écoulement dans une tuyère convergente divergente (de Laval)

Soit une tuyère convergente divergente munie d'un col d'air (Sc) reliant un état générateur (i) et un espace aval (A) , et réalisons une détente à travers la tuyère en supposons que P_A diminue. En étudiant l'évolution de la pression à travers la tuyère, on constate les phénomènes suivants :

Chapitre 3 : Ecoulement isentropique 1D en conduit à section variable



- Si la pression p_A diminue à partir de p_i , au début l'écoulement est subsonique dans toute la tuyère. La pression diminue dans le convergent jusqu'à ce qu'elle atteigne une valeur minimale au col, elle augmente dans le divergent pour atteindre la pression p_A dans l'espace aval.
- Si la pression p_A diminue encore, à un certain moment lorsque $p_c = p_i \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$, l'écoulement devient sonique au col et le débit va tendre vers une valeur maximale, on a : $\dot{m}_{\max} = \dot{m}_c = S_c \cdot \rho_i \cdot a_i \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$. Soit $p_{A'}$ la pression aval pour laquelle on a ce phénomène dans ce cas l'écoulement est subsonique partout sauf au col (écoulement sonique).
- Si la pression p_A devient inférieure à la pression $p_{A'}$ ($p_A < p_{A'}$), le débit massique ne varie plus, il est toujours à sa valeur maximale. Le col reste toujours sonique seulement dans le divergent l'écoulement devient supersonique.

Chapitre 3 : Écoulement isentropique 1D en conduit à section variable

Il se produit une situation complexe dans la quelle tuyère fonction a débit constante, mais entre l'espace aval apparaissent des phénomènes irréversibles (onde de choc) sauf pour une valeur de la pression p_A''' nettement inférieure a p_A .

- Deux cas sont envisagés :
 - Le premier cas $P_A' > P_A > P_A''$, l'écoulement est supersonique dans la première partie du divergent mais devient subsonique dans le reste le raccordement entre les deux s'effectue à travers une onde choc droit. C'est un phénomène irréversible et l'expérience montre que l'écoulement et l'onde de choc perdent leur caractère stationnaire.
 - Le deuxième cas $P_A''' > P_A > P_A''$, l'expérience montre que l'écoulement et l'onde de choc perdent leur caractère stationnaire. Il se produit des décollements de veine donc un régime destructeur.
- ✚ Si la pression p_A devient inférieure à la pression p_A''' , l'écoulement reste isentropique dans toute la tuyère, l'onde de choc se produit à l'aval de la tuyère.

3.6 Aperçu sur les diffuseurs subsoniques et supersoniques.

Les expressions différentielles précédentes nous décrivent les effets d'un changement de section sur la vitesse et la pression qu'on peut analyser en distinguant trois cas :

- **Premier cas** : pour $M = 0$

Cette situation représente les écoulements incompressibles :

- ✚ Si S diminue V augmente,
- ✚ Si S augmente V diminue.

- **Deuxième cas** : pour $0 < M < 1$

Écoulement subsonique, le comportement est qualitativement le même $1 - M^2$ est toujours supérieur à 0, on a donc :

- ✚ Si S diminue V augmente et P diminue,
- ✚ Si S augmente V diminue P augmente

- **Troisième cas** : pour $M > 1$

Écoulement supersonique, $1 - M^2$ est toujours inférieure à 0, l'évolution de la vitesse diffère de façon remarquable de celle qu'on trouve en écoulement incompressible. La masse volumique diminue plus vite que la vitesse de telle sorte que la section doit augmenter pour assurer le principe de la conservation de la masse.

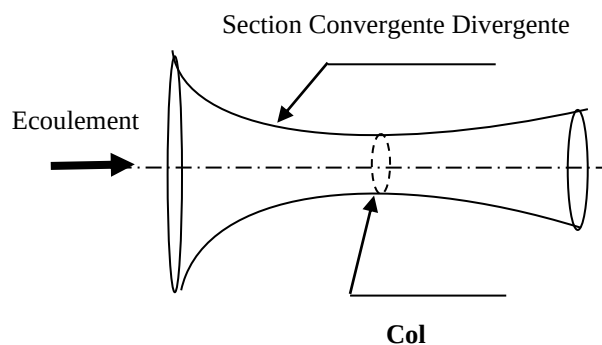
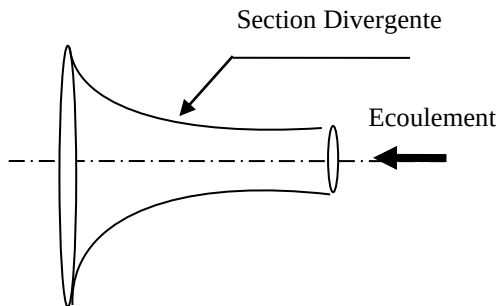
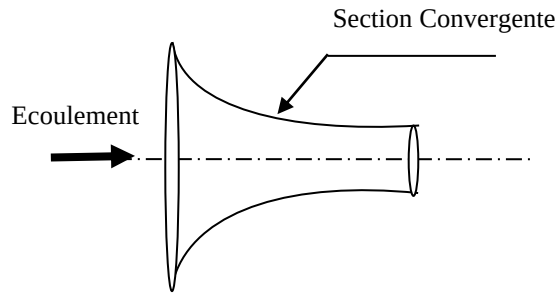
- ✚ Si S augmente V augmente et P diminue,
- ✚ Si S diminue V diminue et P augmente.

Remarques :

On distingue trois types de sections variables:

Chapitre 3 : Écoulement isentropique 1D en conduit à section variable

- ✚ La section convergente qui représente la tuyère convergente
- ✚ La section divergente qui représente la tuyère divergente
- ✚ La section convergente puis divergente qui représente la tuyère convergente divergente ou tuyère de Laval.



Saturation :

Lorsque l'écoulement devient sonique, la conduite doit présenter un col (air de section minimum) où le nombre de Mach est égal à un, cette valeur ne peut être atteinte que dans le col. On note que le nombre de Mach au col n'est pas nécessairement égal à un.