

## CHAPITRE II

### Modèle Mathématique

#### Représentations interne et externe d'un système

### III. Représentations externe d'un système (Fonction de transfert)

#### III.1 Modèle entrée/sortie d'un système

Pour simplifier le modèle linéaire obtenu, pour le rendre plus compact, une tendance habituelle consiste à regrouper toutes les équations en une seule. Il s'agit d'éliminer du jeu d'équations toutes les grandeurs internes au système qui ne sont ni l'entrée, ni la sortie. On obtient alors une unique équation différentielle ne faisant apparaître comme signaux que l'entrée  $u$ , la sortie  $y$  et, éventuellement, leurs dérivées successives. Une telle équation a l'allure suivante:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \quad (3.1)$$

Il s'agit là d'un modèle de comportement entrée/sortie, c'est-à-dire qui traduit l'évolution de la sortie en fonction de celle de l'entrée et ce, en éludant la dynamique interne du système.

Physiquement, il est inconcevable que  $m$  soit strictement supérieur à  $n$ . On peut toujours imaginer un modèle mathématique correspondant à ce cas mais en pratique, cela signifierait que la sortie du système à un instant donné dépend de la valeur de l'entrée à un instant ultérieur. C'est pourquoi l'on suppose que  $m \leq n$ . Un tel système est dit causal (et même strictement causal lorsque  $m < n$ ).

Si l'on revient à l'exemple du circuit RLC (fig. 3.1).

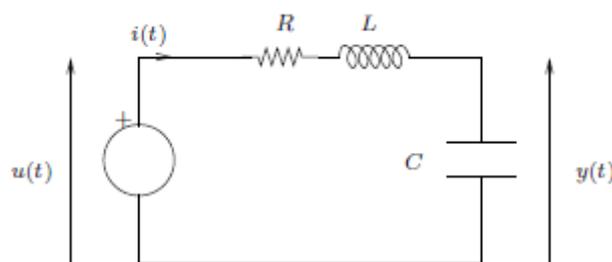


Fig 2.2 Circuit RLC

$$\begin{cases} u(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + y(t) \\ y(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

en regroupant les deux équations données en (3.2), on obtient, par élimination de  $i(t)$ :

$$u(t) = LC\ddot{y}(t) + RC\dot{y}(t) + y(t) \quad (3.3)$$

il est clair que des valeurs élevées de  $m$  et  $n$  rendent difficile la détermination analytique de l'expression du signal  $y(t)$ . En d'autres termes, il est fastidieux, sinon impossible, de résoudre une équation différentielle d'ordre élevé. Aussi a-t-on ressenti le besoin d'introduire un nouvel outil de modélisation, plus aisé à manipuler, et plus à même d'aider l'automaticien dans les phases d'analyse et de commande, il s'agit de la fonction de transfert.

### III.2 Passage de l'équation différentielle à la fonction de transfert

Pour éviter d'avoir à manipuler une équation différentielle pas toujours simple, les électroniciens et à leur suite, les automaticiens, ont décidé d'exploiter un outil mathématique bien connu, **la transformation de Laplace** (parfois appelée de **Carson-Laplace**).

Chaque signal temporel  $f(t)$  causal, c'est-à-dire pour lequel  $f(t) = 0, \forall t < 0$ , peut subir une transformation dite de " **Laplace** ", notée **L**, et ainsi définie:

$$f(t) \xrightarrow{L} F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (3.4)$$

$F(p)$ , si elle existe, c'est-à-dire si l'intégrale est calculable, est appelée transformée de Laplace de  $f(t)$  et la variable complexe  $p = \alpha + j\beta$  (notée  $S$  dans les ouvrages de culture anglo-saxonne) est connue sous le nom de **variable de Laplace**. Cet opérateur possède les propriétés suivantes:

#### 1. linéarité:

$$f_1(t) + kf_2(t) \xrightarrow{L} F_1(p) + kF_2(p)$$

#### 2. théorème de l'intégration:

$$\int_0^{t>0} f(t)dt \xrightarrow{L} \frac{F(p)}{p}$$

#### 3. théorème de la dérivation:

$$\bullet \dot{f}(t) \xrightarrow{L} pF(p) - f(0)$$

$$\bullet \ddot{f}(t) \xrightarrow{L} p^2F(p) - pf(0) - \dot{f}(0)$$

$$\bullet \frac{d^n f(t)}{dt^n} \xrightarrow{L} p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}\dot{f}(0) - \dots - \frac{d^{n-1}f(0)}{dt^{n-1}}$$

$p$  correspond donc, en présence de conditions initiales nulles, à une dérivation dans le domaine de Laplace.

$\frac{1}{p}$  est donc l'opérateur d'intégration dans le domaine de Laplace.

#### 4. théorème du retard:

$$f(t - \theta) \xrightarrow{L} e^{-\theta p} F(p)$$

#### 6. théorème de la valeur initiale:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} pF(p)$$

#### 5. théorème du décalage fréquentiel:

$$f(t)e^{\omega t} \xrightarrow{L} F(p + \omega)$$

#### 7. théorème de la valeur finale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} pF(p)$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (3.3), il vient:

$$U(p) = LC(p^2Y(p) - py(0) - \dot{y}(0)) + RC(pY(p) - y(0)) + Y(p) \quad (3.5)$$

L'équation (3.5) constitue un lien entre la transformée de Laplace du signal d'entrée et celle du signal de sortie.

### III.3 Comment obtenir la fonction de transfert ?

La fonction de transfert est un modèle de comportement entrée/sortie qui s'obtient à partir de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants. Plutôt que de chercher à obtenir  $y(t)$  en fonction de  $u(t)$ , on cherche à obtenir  $Y(p) = L[y(t)]$  en fonction de  $U(p) = L[u(t)]$ . Comme il s'agit de déterminer un modèle qui soit indépendant des conditions initiales, ces dernières sont considérées nulles et l'on applique tout simplement la transformée de Laplace à l'équation différentielle (3.1), ce qui conduit à l'expression suivante:

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad (3.6)$$

$G(p)$  est une fraction rationnelle dépendant de la variable de Laplace, de numérateur  $N(p)$  et de dénominateur  $D(p)$ . Elle est appelée *fonction de transfert* et se révèle très utile pour l'étude des systèmes linéaires monovariabiles.  $G(p)$  est dite *d'ordre n* et selon la règle de causalité évoquée dans la section **III.1**, on aura généralement  $m \leq n$ . La fonction de transfert est alors dite *propre* et même *strictement propre* en cas de stricte causalité du système ( $m < n$ ).

Les racines de  $N(p)$  sont appelées *zéros* du système, ou plus rigoureusement de  $G(p)$ , et celles de  $D(p)$  sont appelées *pôles* de  $G(p)$ . Les zéros ont une influence réelle mais quelque peu difficile à estimer sur le comportement du système. Il convient surtout de se souvenir que les pôles ont une influence encore plus grande en termes de stabilité et de régime transitoire de la réponse du système. Cette influence des pôles est beaucoup plus facile à prévoir.

Dans le cas du circuit RLC, la relation (3.5) conduit à:

$$Y(p) = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1} U(p) + \frac{LCp y(0) + LC\dot{y}(0) + RC y(0)}{LCp^2 + RCp + 1} \quad (3.7)$$

$$Y(p) = \underbrace{\frac{N(p)}{D(p)}}_{G(p)} U(p) + \frac{I(p)}{D(p)}$$

$G(p)$  permet de déterminer le terme de  $Y(p)$  dépendant seulement de  $U(p)$  et non des conditions initiales, ici présentes au niveau du numérateur  $I(p)$ .