CHAPITRE II

Modèle Mathématique

Représentations interne et externe d'un système

II. Représentations interne d'un système (Représentation d'état)

II.1 Introduction

Devant la complexité croissante des systèmes, la fonction de transfert peut parfois sembler ne pas être le modèle le plus approprié pour décrire les comportements considérés. La recherche de performances toujours plus fines peut conduire à la même conclusion. Ceci est particulièrement vrai si l'on sort du cadre ce ce cours et si l'on envisage l'étude de systèmes **multi-variables**. Peut-être encore plus vrai si l'on envisage l'implantation numérique de lois de commande un tant soit peu sophistiquées. Pour ces raisons, d'autres modèles sont utilisés et apparaissent comme une alternative à la fonction de transfert. Le plus célèbre d'entre eux est la ***représentation d'état*** **ou** ***équation d'état*** **ou encore** ***modèle d'état***. Il fut popularisé dans les années 1960 même si son origine est plus lointaine. Il s'agit d'un modèle qui prend en compte la dynamique interne du système et ne se limite pas à la description d'un comportement de type entrée/sortie. Ce chapitre présente les principes de base d'un tel modèle en se restreignant néanmoins, comme pour la fonction de transfert, au cas linéaire **mono-variable** continu et stationnaire.

II.2 Définition

De manière alternative, la dynamique d'un système linéaire invariant d'entrée u et de sortie y peut être décrite par une représentation sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{2.1}$$

avec A, B, C et D des matrices constantes et x un vecteur de dimension n, appelé vecteur d'état. Cette représentation est appelée représentation d'état du système. Le vecteur d'état permet de décrire complètement l'évolution du système, dont il donne une représentation interne. Le système d'équations différentielles d'ordre un $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$ rend compte des équations dynamiques du système alors que la relation $y = Cx + Du$ est l'équation de mesure (ou de sortie) du système.

Les variables d'état permettent de décrire complètement l'évolution dynamique du système par n équations différentielles d'ordre 1. L'état et la sortie peuvent ainsi être calculés, à tout instant, pour des conditions initiales $x(0)$ quelconques.

La matrice A de dimension $n \times n$ est appelée matrice d'évolution (ou encore matrice d'état). Elle rend compte de l'évolution du système en régime libre, c'est-à-dire à commande nulle. La matrice B de dimension $n \times 1$ est appelée ***matrice de commande*** (ou encore ***matrice d'entrée***). Elle rend compte du comportement dynamique du système en réponse à une commande. La matrice C de dimension $1 \times n$ est appelée ***matrice d'observation***, car elle permet de relier la sortie à l'état. Enfin, le scalaire D est le coefficient de transmission directe qui relie directement la commande à la sortie. Dans le cas où $D = 0$, $m < n$ et le système est dit ***strictement propre***.

La représentation d'état peut être associée au schéma-bloc donné par la figure 2.1.

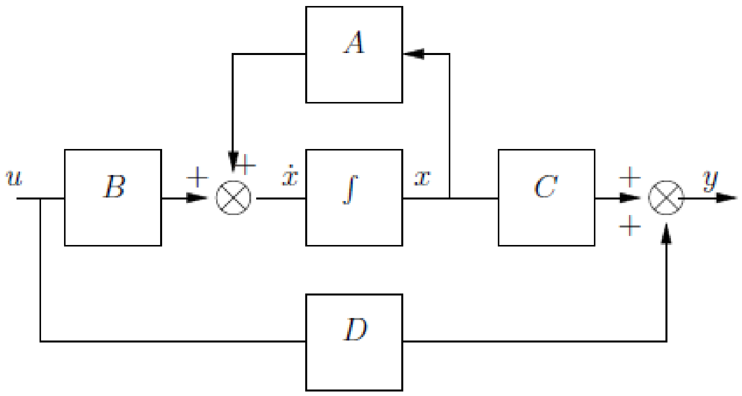

Fig 2.1 Schéma-bloc d'une représentation d'état

Remarque:

☞ Tout changement de variable régulier à partir de ***x*** engendre donc une nouvelle représentation d'état.

Exemple:

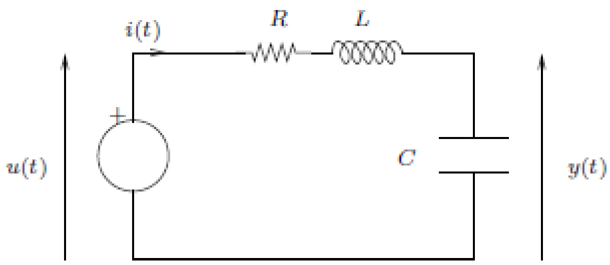

Fig 2.2 Circuit RLC

On considère l'exemple du circuit RLC modélisé par les équations suivantes:

$$\begin{cases} u(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} + y(t) \\ y(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt \Rightarrow \frac{dy\,(t)}{dt} = \frac{1}{C}\,i(t) \end{cases} \tag{2.2}$$

Les deux grandeurs dont la dérivée intervient sont i et y (à partir de maintenant, la dépendance en le temps est omise pour alléger les notations). Soient donc les deux variables d'état $x_1 = i$ et $x_2 = y$. Les équations de (2.2) peuvent se récrire:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 \end{cases} \tag{2.3}$$

Ce qui conduit au modèle (2.1) avec:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = [0 \quad 1] \quad ; \quad D = 0 \qquad (2.4)$$

On peut obtenir un modèle d'état en opérant à partir de l'équation différentielle unique de la forme (2.5) qui faisant apparaitre comme signaux que l'entrée et la sortie et, éventuellement, leurs dérivées successives. Une telle équation a l'allure suivante:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \qquad (2.5)$$

La technique consiste à considérer l'équation différentielle globale (2.5). On suppose d'abord que $m = 0$. On suppose également, sans perte de généralité, que $a_n = 1$ et l'on pose, sans se soucier de la signification du vecteur d'état, les variables d'état suivantes:

$$x_1 = y \quad ; \quad x_2 = \dot{y} \quad ; \quad x_3 = \ddot{y} \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad x_n = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} . \qquad (2.6)$$

On peut alors montrer que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0] \quad ; D = 0 \qquad (2.7)$$

en regroupant les deux équations données en (2.2), on obtient, par élimination de $i(t)$:

$$u(t) = LC\ddot{y}(t) + RC\dot{y}(t) + y(t) \qquad (2.8)$$

Cette équation différentielle unique constitue bien un modèle du lien existant entre l'entrée u(t) et la sortie y(t).

La technique ci-dessus appliquée à l'équation (2.8) conduit à récrire cette dernière ainsi :

$$\ddot{y} + \frac{R}{L}\dot{y} + \frac{1}{LC} y = \frac{1}{LC} u \qquad (2.9)$$

On obtient alors

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} \quad ; \quad C = [1 \quad 0] \quad ; \quad D = 0. \qquad (2.10)$$

qui est un quadruplet de matrices différent de celui trouvé précédemment et donné en (2.4).

Ceci permet de constater que le modèle d'état obtenu dépend du choix des variables d'état. Il n'est donc pas unique, contrairement à la fonction de transfert. En effet, cette dernière est un modèle externe et non interne,